

FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA ELEMENTAR 1

1ª Período Matemática

**Março
2009**

**Campus do Pontal
Prof. MSc. Quintiliano Siqueira Schroden Nomelini**

Capítulo 1

Conjuntos e Conjuntos Numéricos

1.1 Conceitos Básicos

A matemática é construída através axiomas e definições, proposições, teoremas e demonstrações, corolários e outros. Mas o que significa cada um destes nomes? Muitas vezes ouvimos falar de uma demonstração sem entender o seu significado ou mesmo entender a sua aplicação dentro da matemática, o que torna o nosso entendimento limitado e incorreto em muitas das situações.

1. **Proposição:** é todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo.
2. **Definição:** é uma proposição na qual convencionamos o significado de elementos ou termos.
3. **Axioma ou Postulado:** é uma proposição na qual convencionamos propriedades dos elementos ou termos definidos, a verdade dos axiomas é aceita sem demonstração. Estes têm que ser simples, objetivos e inquestionáveis, para a teoria ficar sólida.
4. **Teorema:** é uma proposição que estabelece propriedades dos elementos ou termos cujas verdades são demonstradas usando axiomas e definições já estabelecidos.
5. **Corolário:** é um teorema, sendo uma consequência imediata de outro teorema.
6. **Lema:** Teorema que precede outro teorema para lhe servir na demonstração do teorema maior.

1.2 Conjuntos

Algumas noções são tomadas na *Teoria de Conjunto* sem definição, elas são consideradas como *noções primitivas*. Estas, são as noções de *conjunto*, *elemento* e *pertinência* entre elemento e conjunto.

Uma maneira de “enxergar” um conjunto é como sendo a coleção de todos os elementos que apresentam a mesma característica. Por exemplo, imagine o conjunto formado por todas as vogais do alfabeto arábico, então ele é formado pelos elementos a, e, i, o, u . Observe que este conjunto tem 5 elementos e, além disso, todas as vogais do alfabeto arábico estão representadas e cada elemento deste conjunto é uma vogal.

Para representar um conjunto utiliza-se uma das maneiras a seguir:

1. **Enumeração dos Elementos:** neste caso, utiliza-se uma letra maiúscula do alfabeto arábico para representar o conjunto e escreve-se todos os elementos do conjunto entre chaves.
Ex: $A = \{a, e, i, o, u\}$.
2. **Lei de Formação:** uma lei de formação tem que ser clara e representar todos os elementos do conjunto sem excluir e nem incluir nenhum outro elemento.
Ex: $A = \{x | x \text{ seja uma vogal do alfabeto arábico}\}$
3. **Diagrama de Euler-Venn:** Usa-se uma figura geométrica para delimitar a região onde os elementos do conjunto são enumerados.
Ex:

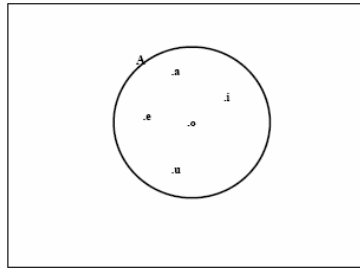


Figura 1.1: Diagrama de Euler-Venn.

Definição 1.2.1. *Dois conjuntos A e B são ditos serem iguais se eles possuem os mesmos elementos.*

Para exemplificar a Definição 1.2.1, tem-se que os seguintes conjuntos são iguais: $\{a, e, i, o, u\} = \{x | x \text{ seja uma vogal do alfabeto}\} = \{u, e, i, o, u, u, a\}$.

Sobre igualdades entre conjuntos é importante ressaltar que um conjunto não depende da maneira como seus elementos são dispostos nele e, por isto, o conjunto é o mesmo se os seus elementos são repetidos ou rearranjados.

Um conjunto que tem um único elemento é chamado de **conjunto unitário**. Por exemplo, $A = \{x | x \text{ seja um número par entre 1 e 3}\} = \{2\}$ é um conjunto unitário.

O **conjunto vazio** é o conjunto que não possui nenhum elemento. Usa-se os símbolos $\emptyset$ ou $\{\}$, para representar o conjunto vazio. É importante ressaltar que o símbolo

$\{\emptyset\}$, não representa um conjunto vazio, e sim representa um conjunto unitário, que possui o elemento $\emptyset$.

Quando um elemento faz parte de um conjunto, diz-se que o elemento *pertence* ao conjunto e usa-se o símbolo $\in$ para representar esta relação, chamada de **Relação de Pertinência**. Caso o elemento não seja um elemento do conjunto usa-se o símbolo $\notin$ para mostrar esta situação. Assim, no exemplo das vogais, tem-se que $a \in A$ ou que $b \notin A$. Também existe uma relação entre conjuntos: um conjunto A é dito ser um **subconjunto** de um conjunto B (ou um conjunto A *está contido* em um conjunto B) se todos os elementos do conjunto A pertencem ao conjunto B e, neste caso, usa-se a notação $A \subset B$. Observe que todo conjunto é subconjunto dele mesmo e o conjunto vazio também é subconjunto de todos os conjuntos.

Observação 1.2.1. 1) Para garantir que dois conjuntos A e B são iguais é necessário e suficiente mostrar que $A \subset B$ e $B \subset A$.
2) Se $A \subset B$, mas $A \neq B$, então A é um subconjunto próprio de B , e usa-se a notação $A \subsetneq B$, para representar esta relação.

O **conjunto universo** representa o conjunto com todos os elementos que estão sendo estudado num determinado contexto. Por exemplo, na matemática geralmente toma-se como o conjunto universo o conjunto dos números reais, ou o conjunto dos números complexos, dependendo da situação. Um conjunto é dito ser **finito** se ele tem uma quantidade finita de elementos e ele é dito ser **infinito** se o seu número de elementos for infinito. Dois conjuntos são chamados de **disjuntos** se eles não possuem elementos em comum.

Definição 1.2.2. Dado um conjunto A , chama-se o **Conjunto das Partes** de A , e é representado por $\mathcal{P}(A)$, o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto A .

Exemplo 1.2.1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$, então
 $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Observação 1.2.2. O número de elementos do conjunto $\mathcal{P}(A)$ é 2^n , onde n é o número de elementos de A .

1.3 Exercícios

Exercício 1.3.1. Diga quais das afirmações abaixo são verdadeiras, justificando a sua resposta.

1. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$
2. $\{1, 2, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
3. $\{1, 2, 3\} = \{x | x \text{ seja número natural menor ou igual a } 4\}$

Exercício 1.3.2. O conjunto $\{1, 2, 3\}$ é disjunto do conjunto $\{2, 5, 4\}$? Por que?

Exercício 1.3.3. *Descreva cada conjunto abaixo utilizando uma lei de formação.*

1. $A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$
2. $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$

Exercício 1.3.4. *Quais dos conjuntos abaixo são unitários e quais são vazios?*

1. $A = \{x | x < \frac{6}{5} \text{ e } x > \frac{9}{4}\}.$
2. $B = \{x | x \text{ é inteiro e } x^2 = 3\}.$
3. $C = \{x | 0.x = 2\}.$
4. $D = \{x | 2x + 1 = 7\}.$
5. $E = \{x | 0.x = 0\}.$
6. $F = \{x | x > \frac{6}{5} \text{ e } x < \frac{9}{4}\}.$
7. $G = \{x | x \text{ é divisor de zero}\}.$
8. $G = \{x | x \text{ é divisível por zero}\}.$

Exercício 1.3.5. *Seja $A = \{0, 1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{\{1\}\}$, analise e classifique cada uma das sentenças abaixo em V (as verdadeiras) e F (as falsas).*

1. $3 \in A.$
2. $3 \in B.$
3. $C \in A.$
4. $\{1\} \in A.$
5. $\{1, 2, 3\} \in B.$
6. $\{1\} \in C.$
7. $3 \subset A.$
8. $3 \subset B.$
9. $C \subset A.$
10. $\{1\} \subset A.$
11. $\{1, 2, 3\} \subset B.$
12. $\{1\} \subset C.$

1.4 Operações Envolvendo Conjuntos

Definição 1.4.1. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chama-se a **União de A e B** o novo conjunto, representado por $A \cup B$, definido por:*

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}. \quad (1.1)$$

Dizer que “ x pertence a $A \cup B$ ” é o mesmo que dizer que pelo menos uma das sentenças a seguir sempre vale: “ x pertence a A ” ou “ x pertence a B ”. Daqui, resulta imediatamente o Teorema 1.4.1.

Teorema 1.4.1. *Quaisquer que sejam os subconjuntos A e B tem-se $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B)$.*

Demonstração 1.4.1. $\forall x \in A \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow A \subset A \cup B$. Por outro lado, $\forall x \in B \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow B \subset A \cup B$.

□

Os diagramas de Euler-Venn ajudam a visualizar a União entre conjuntos. Na Figura 1.2 está representado dois conjuntos, A e B . A região sombreada representa a união dos conjuntos.

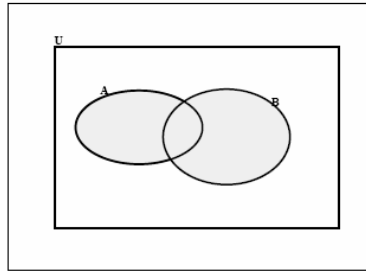


Figura 1.2: Diagrama de Euler-Venn representando a união de A e B .

Teorema 1.4.2. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Então:*

$$A \cup B = B \cup A. \quad (1.2)$$

Demonstração 1.4.2. $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \Leftrightarrow x \in B \text{ ou } x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A$.

□

Em outras palavras a operação União entre dois conjuntos é uma operação comutativa. Outras propriedades importantes da união entre conjuntos é apresentada no Teorema 1.4.3.

Teorema 1.4.3. *Sejam A , B e C conjuntos quaisquer. Então:*

1. $A \cup A = A$.
2. $A \cup \emptyset = A$.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Demonstração 1.4.3. 1. $x \in A \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in A \Leftrightarrow x \in A \cup A$.

2. $x \in A \cup \emptyset \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in A$, pois $x \notin \emptyset$.

3. $x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ ou $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$.

□

Em outras palavras o Teorema 1.4.3 garante que a operação de união entre conjuntos é uma operação idempotente, com elemento neutro e associativa.

Definição 1.4.2. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chama-se a *intersecção de A e B* o novo conjunto, representado por $A \cap B$, definido por:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}. \quad (1.3)$$

Dizer que “ x pertence a $A \cap B$ ” é o mesmo que dizer que as duas sentenças a seguir valem ao mesmo tempo: “ x pertence a A ” e “ x pertence a B ”. Desta definição, chega-se ao Teorema 1.4.4.

Teorema 1.4.4. Quaisquer que sejam os subconjuntos A e B tem-se $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B$.

Demonstração 1.4.4. $\forall x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow A \cap B \subset A$. Por outro lado, $\forall x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \cap B \subset B$.

□

Assim como a operação União, a operação Intersecção é uma operação comutativa, como demonstrado no Teorema 1.4.6.

Teorema 1.4.5. Quaisquer que sejam os subconjuntos A e B tem-se que

$$A \cap B = B \cap A. \quad (1.4)$$

Demonstração 1.4.5. $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B \Leftrightarrow x \in B$ e $x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A$.

□

A operação de intersecção também é uma operação idempotente, com elemento neutro e associativa, como visto no Teorema 1.4.6.

Teorema 1.4.6. *Sejam A , B e C conjuntos quaisquer e U o conjunto universo. Então:*

1. $A \cap A = A$.
2. $A \cap U = A$.
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Demonstração 1.4.6. *Exercício.*

□

1.5 Exercícios

Exercício 1.5.1. *Mostre que:*

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$;
2. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$;
3. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$;
4. $A \cap (A \cup B) = A$;
5. $A \cup (A \cap B) = A$;
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

Exercício 1.5.2. *Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$ e $C = \{c, e\}$, encontre:*

1. $A \cup B$;
2. $A \cup C$;
3. $B \cup C$;
4. $A \cup B \cup C$;

Exercício 1.5.3. *Classifique cada uma das afirmações abaixo em V (as verdadeiras) e F (as falsas).*

1. $\emptyset \subset (A \cup B)$;
2. $A \in (A \cup B)$;
3. $(A \cup B) \subset A$;
4. $(A \cup B) \subset (A \cup B)$;

5. $B \subset (A \cup B)$;

6. $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$;

Exercício 1.5.4. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ e $C = \{c, e, f\}$, encontre:

1. $A \cap B$;

2. $A \cap C$;

3. $B \cap C$;

4. $A \cap B \cap C$;

Exercício 1.5.5. Classifique cada uma das afirmações abaixo em V (as verdadeiras) e F (as falsas).

1. $\emptyset \subset (A \cap B)$;

2. $A \in (A \cap B)$;

3. $(A \cap B) \subset A$;

4. $(A \cap B) \subset (A \cap B)$;

5. $B \subset (A \cap B)$;

6. $(A \cap B \cap C) \subset (A \cap B)$;

Exercício 1.5.6. Considere os conjuntos abaixo:

$A =$ conjuntos dos quadriláteros planos.

$P = \{X \subset A \mid X \text{ tem lados 2 a 2 paralelos}\}$.

$L = \{X \subset A \mid X \text{ tem 4 lados congruentes}\}$.

$R = \{X \subset A \mid X \text{ tem 4 ângulos retos}\}$.

$Q = \{X \subset A \mid X \text{ tem 2 lados paralelos e 2 ângulos retos}\}$.

Então, encontre os conjuntos abaixo:

1. $L \cap P$;

2. $R \cap P$;

3. $L \cap R$;

4. $Q \cap R$;

5. $L \cap Q$;

6. $P \cup Q$;

Exercício 1.5.7. Usando um diagrama de Euler-Venn, como o modelo abaixo, hachure as regiões representadas por cada um dos conjuntos abaixo.

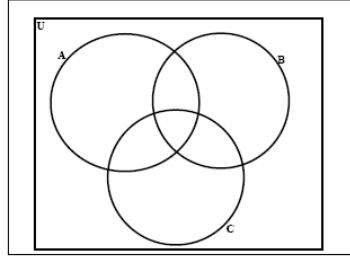


Figura 1.3: Diagrama de Euler-Venn para o Exercício 1.5.7.

1. $A \cap B \cap C$;
2. $A \cup (B \cap C)$;
3. $A \cap (B \cup C)$;
4. $A \cup B \cup C$;

Exercício 1.5.8. *Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Então, encontre:*

1. $P(A)$;
2. $P(B)$;
3. $P(A \cap B)$;
4. $P(A \cup B)$;

Definição 1.5.1. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chama-se a **Diferença de B com A** , denotado por $B - A$, ao conjunto definido por:*

$$B - A = \{x \in U | x \in B \text{ e } x \notin A\}. \quad (1.5)$$

Definição 1.5.2. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, tais que $A \subset B$. Chama-se o **Complementar de A com relação a B** , denotado por A^c ou C_A^B , ao conjunto $B - A$.*

Na verdade, o complementar de um determinado conjunto é o conjunto formado por todos os elementos que não pertencem a um determinado subconjunto.

Exemplo 1.5.1. *Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ e $C = \{2, 4, 8\}$. Tem-se que:*

1. $A - B = \{2, 4, 6\}$;
2. $A - C = \{1, 3, 5, 6\}$;
3. $B - A = \emptyset$;
4. $C - A = \{8\}$;

5. $C_A^B = \{2, 4, 6\}$;
6. C_A^C não pode ser obtido, pois $C \notin A$.

A Figura 1.4 mostra a diferença de um conjunto B qualquer com um conjunto A . Neste caso, A não precisa ser um subconjunto de B . Já na Figura 1.5

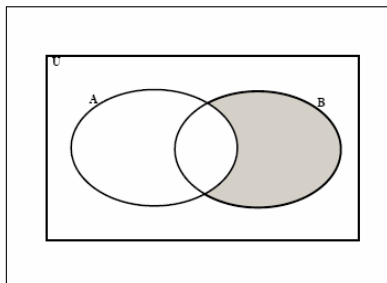


Figura 1.4: Diagrama de Euler-Venn representando a diferença entre dois conjuntos.

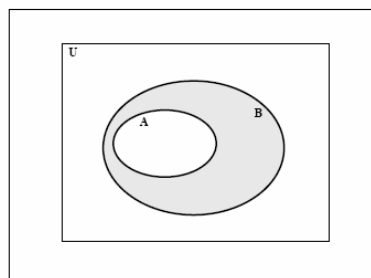


Figura 1.5: Diagrama de Euler-Venn representando o Complementar entre conjuntos.

1.6 Exercícios

Exercício 1.6.1. *Mostre que:*

1. $B - A \subset A, \forall A$;
2. $C_B^A \cap B = \emptyset$;
3. $C_B^A \cup B = A$;
4. $C_A^A = \emptyset$;
5. $C_\emptyset^A = A$;
6. $C_{C_B^A}^A = B$;
7. $C_{B \cap C}^A = C_B^A \cup C_C^A$;
8. $C_{B \cup C}^A = C_B^A \cap C_C^A$;

Exercício 1.6.2. *Classifique cada uma das afirmações abaixo em V (as verdadeiras) e F (as falsas).*

1. $\emptyset \subset (A - B)$;
2. $(A - B) \subset B$;

3. $(A - B) \cup (A \cap B) = A$;
4. $(A - B) \subset (A \cup B)$;
5. $(A - B) \subset A^c$;
6. $(A - B) \subset B^c$;

Exercício 1.6.3. Usando um diagrama de Euler-Venn, como o modelo abaixo, hachure as regiões representadas por cada um dos conjuntos abaixo.

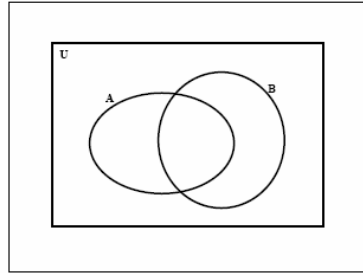


Figura 1.6: Diagrama de Euler-Venn para o Exercício 1.6.3.

1. $A \cap B \cap C$;
2. $A \cup (B \cap C)$;
3. $A \cap (B \cup C)$;
4. $A \cup B \cup C$;

1.7 Conjunto dos Números Naturais

Definição 1.7.1. Chama-se o **Conjunto dos Números Naturais**, denotado por $\mathbb{N}$, o conjunto formado pelos números $0, 1, 2, 3, 4, \dots$. Assim, tem-se que

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}. \quad (1.6)$$

Observe que o zero foi colocado no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Na verdade, existem correntes que consideram o zero como um número natural e outras correntes que são contra. Nestas notas o zero poderá ou não fazer parte dos números naturais, dependendo da situação. Esta dificuldade surgiu pelo fato do zero ter sido criado posteriormente, para suprir a necessidade.

Caso esteja sendo considerado o zero como um número natural, pode-se excluí-lo do conjunto com a seguinte notação:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}. \quad (1.7)$$

No conjunto $\mathbb{N}$ existem duas operações, uma chamada de **adição** e outra chamada de **multiplicação**. Elas são definidas a seguir.

Definição 1.7.2. A **adição**, denotada por $+$, é uma função de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que transforma o par (a, b) no número $a + b$. A adição tem as seguintes propriedades:

1. associativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$;
2. comutativa: $a + b = b + a$;
3. existência do elemento neutro: $a + 0 = a$, $\forall a \in \mathbb{N}$;

Definição 1.7.3. A **multiplicação**, denotada por $\cdot$, é uma função de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que transforma o par (a, b) no número $a \cdot b$. A multiplicação tem as seguintes propriedades:

1. associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
2. comutativa: $a \cdot b = b \cdot a$;
3. existência do elemento neutro: $a \cdot 1 = a$, $\forall a \in \mathbb{N}$;
4. não tem divisores de zero: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$;
5. distributiva em relação a adição: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Observação 1.7.1. Na multiplicação, quando ficar bem claro, o sinal $\cdot$ pode ser omitido. Por exemplo, no produto $a \cdot b$, pode-se escrever simplesmente ab . Já em $3 \cdot 4$, o símbolo não pode ser omitido, pois ficaria 34 e não 12 .

No conjunto $\mathbb{N}$ também é definido uma **ordem**, chamada de **menor ou igual** e que é representada pelo símbolo $\leq$. Esta ordem apresenta as seguintes propriedades:

1. a ordem é reflexiva: $a \leq a$, $\forall a \in \mathbb{N}$;
2. a ordem é anti-simétrica: $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$;
3. a ordem é transitiva: $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$;
4. a ordem tem totalidade: $\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$ ou $b \leq a$;
5. a ordem tem compatibilidade com a adição: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

O **Primeiro Princípio de Indução** é uma afirmação bastante útil para a demonstração de teoremas. Este princípio é enunciado a seguir.

Definição 1.7.4. Seja $a \in \mathbb{N}$ e suponha que para cada $n \geq a$ esteja associado uma afirmação $P(n)$. Então, $P(n)$ será verdadeira $\forall n \geq a$ desde que seja possível provar as seguintes afirmações:

1. $P(a)$ é verdadeira;
2. Se $P(r)$ é verdadeira para $r \geq a$, então $P(r+1)$ também é verdadeira.

O Segundo Princípio de Indução também é uma afirmação bastante útil para a demonstração de teoremas.

Definição 1.7.5. *Seja $a \in \mathbb{N}$ e suponha que para cada $n \geq a$ esteja associado uma afirmação $P(n)$. Então, $P(n)$ será verdadeira $\forall n \geq a$ desde que seja possível provar as seguintes afirmações:*

1. $P(a)$ é verdadeira;
2. Dado $r > a$, se $P(k)$ é verdadeira para $r > k \geq a$, então $P(r)$ também é verdadeira.

Exemplo 1.7.1. Prove que $1 + n \leq 2^n$, $\forall n \geq 0$.

Solução:

1 - $1 + 0 \leq 2^0 = 1$, então a afirmação é verdadeira para $n = 0$;
 2 - Suponha que a afirmação é válida para k . Então: $1 + (k+1) = 2 + k \leq 2 + 2k(?) = 2(1+k) \leq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. Logo a afirmação é verdadeira para $k+1$, então a afirmação é verdadeira $\forall n \geq 0$ em $\mathbb{N}$.

Exemplo 1.7.2. Prove que $1 + 2 + 3 + \dots = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \geq 1$.

Solução:

1 - $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$, então a afirmação é verdadeira para $n = 1$;
 2 - Suponha que a afirmação é válida para k . Então: $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Assim, $1 + 2 + \dots + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = (k+1)\left[\frac{k}{2} + 1\right] = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Logo, a afirmação é verdadeira para $k+1$ e, portanto, a afirmação é verdadeira $\forall n \geq 1$ em $\mathbb{N}$.

1.8 Exercícios

Exercício 1.8.1. Use o Princípio de Indução para provar cada uma das afirmações abaixo:

1. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
3. $2 + 5 + 8 + \dots + (2+3n) = \frac{n(4+3n)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
4. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
5. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1.9 O Conjunto dos Números Inteiros $\mathbb{Z}$

Definição 1.9.1. Chama-se o **Conjunto dos Números Inteiros**, denotado por $\mathbb{Z}$, o conjunto formado pelos números $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$. Assim, tem-se que

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}. \quad (1.8)$$

Observação 1.9.1. Nos conjuntos numéricos, algumas vezes é interessante ou necessário trabalhar apenas com os números positivos ou negativo, ou mesmo excluir um destes elementos. Para isto usa-se uma notação de forma que sempre seja possível visualizar cada uma destas necessidades. Assim, quando um conjunto numérico aparece com um asterisco na parte superior indica-se que o conjunto não tem o elemento zero; quando ele apresenta o sinal de + na parte inferior do conjunto ele excluiu os números positivos e se o sinal for o de - está excluído os números negativos. Desta forma tem-se que:

1. O conjunto do números inteiros **não nulos**:

$$Z^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\} \quad (1.9)$$

2. O conjunto do números inteiros **não negativos**:

$$Z_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (1.10)$$

3. O conjunto do números inteiros **não positivos**:

$$Z_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\} \quad (1.11)$$

4. O conjunto do números inteiros **positivos**:

$$Z_+^* = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1.12)$$

5. O conjunto do números inteiros **negativos**:

$$Z_-^* = \{\dots, -3, -2, -1\} \quad (1.13)$$

As operações com números inteiros são definidas da mesma forma que as operações de números naturais. Mas é importante ressaltar que as operações aplicadas ao conjunto dos números inteiros possuem algumas propriedades que não aparecem quando aplicadas ao números naturais. Estas propriedades são dadas a seguir.

1. Existência de elemento oposto na soma: $a + (-a) = 0, \forall a \in Z$;
2. $ab = 1 \Rightarrow a = 1$ e $b = 1$ ou $a = -1$ e $b = -1$;
3. se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ então $ab \geq 0$;
4. Existência de regras de sinal:
 - (a) se $a < 0$ e $b < 0$, então $ab > 0$;
 - (b) se $a < 0$ e $b > 0$, então $ab < 0$;
 - (c) se $a > 0$ e $b > 0$, então $ab > 0$;

Observação 1.9.2. A operação subtração é um caso particular da soma, onde $a - b$ nada mais é do que a soma do elemento a com o oposto de b , isto é, $a - b = a + (-b)$.

Definição 1.9.2. Seja L um subconjunto não vazio de Z . Então, diz-se que L é **limitado inferiormente** se existe um elemento $a \in Z$ tal que $a \leq x, \forall x \in L$. Analogamente, diz-se que L é **limitado superiormente** se existe um elemento $a \in Z$ tal que $a \geq x, \forall x \in L$.

No conjunto dos números inteiros tem o chamado **Princípio do Menor Número Inteiro**, ele diz o seguinte: se L é um subconjunto não vazio de Z e se L é limitado inferiormente, então existe um elemento $l_0 \in L$, tal que $l_0 \leq x, \forall x \in L$.

Teorema 1.9.1. O número l_0 definido anteriormente é único.

Demonstração 1.9.1. Seja L um conjunto não vazio de números inteiros limitado inferiormente. Suponha que exista em L l_0 e l_1 de forma que $l_0 \leq x, \forall x \in L$ e $l_1 \leq x, \forall x \in L$. Então, $l_0 \leq l_1$, pois $l_1 \in L$ e $l_0 \leq l_1$, pois $l_0 \in L$. Então, pela anti-simetria da relação de ordem nos números inteiros tem-se que $l_0 = l_1$.

□

Observação 1.9.3. Qualquer número $a \in Z$, tal que $a \leq x, \forall x \in L$ é chamado de **Cota Inferior** de L . O único número l_0 que existe num conjunto L , não vazio de números naturais limitado inferiormente, de forma que $l_0 \leq x, \forall x \in L$ é chamado de **Mínimo** do conjunto L .

Exemplo 1.9.1. O conjunto $A = \{-2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ é não vazio e limitado inferiormente. Ele possui os números $-2, -3, -4, \dots$ como cotas inferiores. O mínimo do conjunto A é -2 . Já o conjunto $B = \{\dots, -8, -6, -4, -2, 0\}$ não é limitado inferiormente, logo ele não possui uma cota inferior.

De maneira análoga tem-se o chamado **Princípio do Maior Número Inteiro**: se L é um subconjunto não vazio de Z e se L é limitado superiormente, então existe um elemento $l_0 \in L$, tal que $l_0 \geq x, \forall x \in L$. Qualquer número a em Z , de forma que $a \geq x, \forall x \in Z$ é chamado de **Cota Superior** de L . O número l_0 definido anteriormente é chamado de **Máximo** de L .

Exemplo 1.9.2. O conjunto $A = \{-2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ não é limitado superiormente, logo ele não possui cotas superiores e nem máximo. Já o conjunto $B = \{\dots, -8, -6, -4, -2, 0\}$ é não vazio e limitado superiormente, os números $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ são cotas superiores de B . O máximo do conjunto B é 0 .

Observação 1.9.4. O Conjunto dos números inteiros Z pode ser representado sobre uma reta orientada da seguinte maneira:

1. Indique o sentido positivo da reta;
2. tome um ponto de origem sob a reta orientada;
3. estabeleça uma unidade de comprimento $u \neq 0$ e, a partir da origem e no sentido positivo, marque uma unidade u de comprimento estabelecendo o número 1;
4. para todo inteiro positivo n marca-se o segmento nu , no sentido positivo, desde a origem, obtendo uma representação para o número n , como sendo a outra extremidade do segmento nu .

5. analogamente, para todo inteiro negativo n marca-se o segmento nu , no sentido negativo, desde a origem, obtendo uma representação para o número $-n$, como sendo a outra extremidade do segmento nu .

Assim, os números inteiros podem ser representados conforme a Figura 1.7.

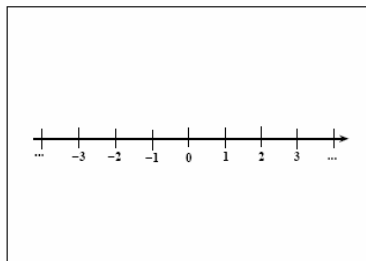


Figura 1.7: Uma representação dos números inteiros numa reta orientada.

O conceito de **Divisores** e **Múltiplos** são de grande importância na matemática.

Definição 1.9.3. Diz-se que um número inteiro a é **divisor** de um número inteiro b ou que a **divide** b ou que b é **múltiplo** de a , e denota-se por $a|b$, se existe um número $c \in \mathbb{Z}$, tal que, $b = ac$.

Definição 1.9.4. O conjunto dos divisores de a , denotado por $D(a)$, é formado por todos os elementos $c \in \mathbb{Z}$ tais que $c|a$. Ou seja:

$$D(a) = \{c \in \mathbb{Z} \mid c|a\} \quad (1.14)$$

Exemplo 1.9.3. 1. $2|12$, pois $2 \cdot 6 = 12$;

2. $3|-18$, pois $3 \cdot (-6) = -18$;

3. $4|0$, pois $4 \cdot 0 = 0$;

Observação 1.9.5. O zero não é divisor de nenhum número, pois não existe números inteiros a e b , diferentes de zero, tal que $ab = 0$.

Definição 1.9.5. O módulo ou valor absoluto de um número a , denotado por $|a|$, é definido por:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Da Definição 1.18.1 tem-se que o módulo de um número é sempre um número não negativo. Além disso, é possível demonstrar as seguintes propriedades:

1. $|a| \geq 0$, para todo $a \in \mathbb{Z}$;

2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;
3. $|a| \cdot |b| = |ab|$, para todo a e b em Z ;
4. $|a|^2 = a^2$, para todo $a \in Z$;
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$, para todo a e b em Z (Desigualdade Triangular);
6. $|a - b| \geq |a| - |b|$, para todo a e b em Z ;
7. Se $a > 0$, então $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;
8. Se $a > 0$, então $|x| \geq a \Leftrightarrow -a \leq x$ ou $x \geq a$;

Observação 1.9.6. *Estas propriedades são importantes e deveram ser demonstradas depois que for estudado o Conjunto dos Números Reais.*

1.10 Exercícios

Exercício 1.10.1. *Descreva cada um dos conjuntos abaixo:*

1. $D(6)$;
2. $D(-18)$;
3. $D(-24)$;
4. $D(16)$;
5. $D(-24) \cap D(16)$;
6. $M(4)$;
7. $M(-10)$;
8. $M(-9)$;
9. $M(6)$;
10. $M(-9) \cap M(6)$;

1.11 O Conjunto dos Números Racionais

Seja $q \in \mathbb{Z}^*$ de forma que $q \neq 1$ e $q \neq -1$. Então tem-se que não existe o inverso multiplicativo de q em $\mathbb{Z}$, ou seja, não existe um número $p \in \mathbb{Z}$, tal que, $qp = 1$. Por isto, não é possível definir uma operação de divisão para todo par de números inteiros.

Definição 1.11.1. Chama-se o **Conjunto dos Números Racionais**, e denota-se por $\mathbb{Q}$, o conjunto formado por todos os números da forma $\frac{a}{b}$ (ou a/b) onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Isto é:

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{a}{b}, \text{ onde } a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}. \quad (1.16)$$

Observação 1.11.1. 1 - Assim como o conjunto dos números inteiros pode-se usar apenas alguns símbolos para representar parte dos conjuntos racionais, como por exemplo $\mathbb{Q}^*$ é o conjunto dos números racionais não nulos.

2 - É possível comparar duas frações com a seguinte propriedade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

3 - As operações de adição e multiplicação são definidas de forma a utilizar as operações definidas para o conjunto dos números inteiros. Por isto, a adição de duas frações é definida como a seguir: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ e a multiplicação é definida por: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

4 - O número da forma $\frac{a}{b}$ chama-se de **fração**, o número a chama-se **numerador** e o número b chama-se **denominador**.

5 - Quando o numerador a e o denominador b de uma fração tem o $\text{mdc}(a, b) = 1$, diz-se que a fração é **irredutível**.

6 - Tem-se que todo número inteiro a pode ser escrito da forma $\frac{a}{1}$ então, todo número inteiro também é um número racional e, por isto, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

7 - A ordem “menor ou igual” dos números racionais é definida de maneira simétrica a ordem para números inteiros. Ela é definida por: $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} \leq \frac{cb}{bd}$.

Sobre as propriedades envolvendo a adição e multiplicação dos números racionais, tem-se que elas obedecem à propriedades idênticas as operações envolvendo números inteiros. ou seja:

1. a adição de números racionais é associativa;
2. a adição de números racionais é comutativa;
3. existe o elemento neutro na soma de números racionais;
4. existe o elemento oposto na soma de números racionais;
5. a multiplicação de números racionais é associativa;
6. a multiplicação de números racionais é comutativa;
7. existe o elemento neutro na multiplicação de números racionais;
8. existe a distributiva da multiplicação em relação a adição de números racionais.

Existe uma outra propriedade envolvendo números racionais que não existe para todos os números inteiros, que é a propriedade que garante a existência do inverso de um número $\frac{a}{b}$, isto é, para todo número racional $\frac{a}{b}$ não nulo existe outro número racional $\frac{b}{a}$ de forma que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1. \quad (1.17)$$

Observação 1.11.2. *Observe que a operação divisão é uma operação que aparece em consequência da operação multiplicação dos números racionais em conjunto com a existência do inverso dos números racionais. Ela pode ser vista como a seguir:*

$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}^*$ tem-se que

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} := \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (1.18)$$

Todo número **Decimal Exato** também é um número racional, pois sempre que tem-se um número decimal exato na verdade tem-se um número que é a divisão de um determinado número por uma potência de 10. Para exemplificar, tem-se que:

$$0,02 = \frac{2}{100} \quad (1.19)$$

$$1,234 = \frac{1234}{1000} \quad (1.20)$$

Uma **Dízima Periódica** é um número decimal não exato que tem uma repetição, a partir de um determinado algarismo, de um elemento chamado de período. Por exemplo, o número decimal 0,111... é uma dízima periódica pois o 1, que é o período, está repetido antes da reticências pelo menos duas vezes; o número 0,1223234234... também é uma dízima periódica, cujo período é o elemento 234; já o número 0,101001... não é uma dízima periódica, pois nenhum grupo de elementos repete duas vezes antes da reticências. Existem dízimas periódicas chamadas de simples e de compostas: uma dízima periódica simples é aquela que não possui elementos diferentes do período na parte decimal e se

existir um número na parte decimal que não faz parte do período então tem-se que a dízima periódica é composta. Assim, por exemplo, a dízima $0,111\dots$ é uma dízima periódica simples enquanto a dízima $0,1223234234\dots$ é uma dízima periódica composta.

Uma maneira de transformar uma dízima periódica em fração é usando soma de PG infinita. Observe que:

$$0,111\dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \quad (1.21)$$

então, a dízima periódica $0,111\dots$ pode ser pensada na soma dos elementos da seqüência $(\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots)$. Logo, a dízima periódica pode ser vista como sendo a soma dos elementos de uma PG de razão $\frac{1}{10}$. Então, como a PG é infinita tem-se que a sua soma é dada por

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - q}, \quad (1.22)$$

onde a_1 é o primeiro termo da PG e q é a razão da PG. Logo, para a dízima $0,111\dots$ tem-se que:

$$0,111\dots = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}. \quad (1.23)$$

Com isto, tem-se que: $0,2323\dots = \frac{23}{99}$, $0,423423\dots = \frac{423}{999}$, etc.

Observação 1.11.3. *O que ocorre se a parte inteira da dízima periódica não for zero ou se a dízima periódica não for simples? Nada de diferente, por exemplo, para uma dízima periódica com parte inteira não nula pode-se proceder como a seguir: $1,111\dots = 1 + 0,111\dots = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$. Para uma dízima periódica composta, pode-se proceder de uma maneira semelhante, apenas com algumas adaptações: se $x = 0,2111\dots$ então $10x = 2,111\dots = 2 + 0,111\dots = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9} \Rightarrow x = \frac{19}{90}$.*

Portanto, os números racionais é formado por todas as frações, todos os números inteiros, todos os números decimais exatos e todas as dízimas periódicas.

1.12 Exercícios

Exercício 1.12.1. *Transforme cada um dos números decimais abaixo em uma fração irredutível:*

1. $0,4$;
2. $1,25$;
3. $0,4444\dots$;
4. $0,2323\dots$;

5. 2,555...;

6. 1,2777...;

7. 2,123535....;

Exercício 1.12.2. Coloque os números racionais $\frac{15}{16}, \frac{11}{12}, \frac{18}{19}, 1, \frac{47}{48}$ e $\frac{2}{3}$.

Exercício 1.12.3. Mostre que entre quaisquer dois números racionais a e b , com $a < b$, existe um número racional c de forma que $a < c < b$.

1.13 O Conjunto dos Números Irracionais I

Quando os pitagóricos estava estudando triângulos retângulos isósceles de lado medindo uma unidade, apareceu um número que viria a mudar toda a matemática da época, pois tinha-se que a hipotenusa de tal triângulo ao quadrado é 2, ou seja, tem-se que a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos medindo 1 é $\sqrt{2}$, que não era um número racional. Nascia então, o conhecimento sobre os números irracionais.

Definição 1.13.1. O *Conjunto dos Números Irracionais*, denotado por I , é formado por todos os números que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$I = \{x | x \notin \mathbb{Q}\}. \quad (1.24)$$

Observação 1.13.1. 1 - O conjunto I é formado por dízimas não periódicas e raízes não exatas.

2 - As operações de adição e multiplicação são definidas do mesmo modo que para os conjuntos dos números racionais.

3 - A ordem “menor e igual” para os números irracionais também são definidas da mesma forma que para os conjuntos dos números racionais.

Exemplo 1.13.1. 1 - $\sqrt{2} = 1,414213562...$;

2 - $\sqrt{3} = 1,732050807...$;

3 - $e = 2,71828...$ (este é o número de Euler);

4 - $\pi = 3,1415926535897932...$ (π é razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro);

5 - 1,23450030402..... (uma dízima não periódica qualquer).

1.14 Conjunto dos Números Reais

Definição 1.14.1. O conjunto dos Números Reais, denotado por $\mathbb{R}$, é o conjunto formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração (os números racionais) e as dízimas não periódicas (os números irracionais). Então:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I. \quad (1.25)$$

Observação 1.14.1. 1 - As operações de adição e multiplicação (juntamente com as suas propriedades) para os números reais são as mesmas que são definidas para os números racionais.

2 - A ordem “menor e igual” (juntamente com as suas propriedades) para os números reais é a mesma que vale para os números racionais.

3 - Assim como os outros conjuntos numéricos, pode-se usar os símbolos $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+$, etc., para representar partes do conjunto dos números reais.

4 - Os números reais podem ser representados sobre a reta numérica da mesma forma que os números inteiros. Se o ponto P representa o número a , então diz que P tem coordenada a e que a é a coordenada de P .

5 - As regras de sinais para os números reais são as mesmas definidas para os números inteiros.

6 - A soma e o produto de dois números inteiros é também um número inteiro; a soma e o produto de dois números racionais também é um número racional; a soma, o produto, o quociente e a raiz de dois números reais é também um número real.

7 - A soma e o produto de dois números irracionais é sempre irracional? Resposta: NÃO, por exemplo: $(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 \notin I$ e $\sqrt{3} * \sqrt{3} = 3 \notin I$.

Tem-se que o conjunto dos números reais é formado por todos os números conhecidos, exceto as raízes de índice par com radicando negativo, por exemplo: $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-81}$, etc. Então, todos os pontos da reta numérica representam algum número real e, por isto, sempre que tomamos uma quantidade de pontos entre dois números reais a e b (com $a < b$), na reta numérica, tem-se o chamado **intervalo de pontos** na reta numérica ou o **intervalos de números reais**. Os intervalos numéricos limitados entre a e b são definidos como a seguir:

1. **Intervalo Aberto** é o conjunto

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}. \quad (1.26)$$

2. **Intervalo Fechado** é o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}. \quad (1.27)$$

3. **Intervalo Semi-Aberto à Esquerda** é o conjunto

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \quad (1.28)$$

4. **Intervalo Semi-Aberto à Direita** é o conjunto

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\} \quad (1.29)$$

Para exemplificar cada um destes intervalos, observe na Figura 1.8 (1) tem-se a representação do intervalo fechado entre a e b ; na Figura 1.8 (2) tem-se a representação do intervalo aberto entre a e b ; na Figura 1.8 (3) tem-se a representação do intervalo semi-aberto à esquerda entre a e b e na Figura 1.8 (4) tem-se a representação do intervalo semi-aberto à direita entre a e b .

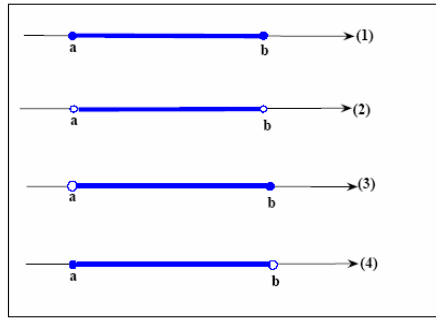


Figura 1.8: Representação de intervalos numéricos limitados entre $a < b$.

Observação 1.14.2. Não se esqueça que os intervalos numéricos são conjuntos, por isto, é possível efetuar as operações de união, intersecção e diferença entre dois ou mais intervalos.

Exemplo 1.14.1. Considere os conjuntos $A = [2, 4]$, $B =]-1, 3]$, $C = [0, 5[$ e $D =]1, 5]$. Faça cada uma das operações desejadas: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $A \cap D$, $A \cup D$, $B \cap C$, $B \cup C$, $B \cap D$, $B \cup D$, $C \cap D$, $C \cup D$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap D$, $A \cup B \cup D$, $A \cap C \cap D$, $A \cup C \cup D$, $A - B$, $B - A$, $A - C$, $C - A$, $A - D$, $D - A$, $B - C$, $C - B$, $B - D$, $D - B$, $C - D$, $D - C$.

SOLUÇÃO:

Existem também os intervalos infinitos, que podem ser numa direção ou podem ser infinitos nas duas direções. Os intervalos numéricos ilimitados são definidos por:

1. Intervalo Infinito Aberto à Direita é o conjunto

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} | x < a\} \quad (1.30)$$

2. Intervalo Infinito Fechado à Direita é o conjunto

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\} \quad (1.31)$$

3. Intervalo Infinito Aberto à Esquerda é o conjunto

$$]b, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | b < x\}. \quad (1.32)$$

4. Intervalo Infinito Fechado à Esquerda é o conjunto

$$[b, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | b \leq x\}. \quad (1.33)$$

5. Intervalo Infinito à Esquerda e à Direita é o conjunto

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \in \mathbb{R}\} \quad (1.34)$$

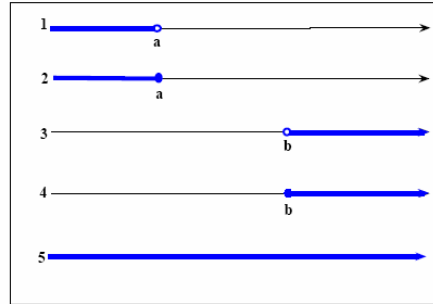


Figura 1.9: Representação de intervalos numéricos ilimitados.

Para exemplificar cada um destes intervalos, observe na Figura 1.9 (1) tem-se a representação do intervalo ilimitado à esquerda aberto em a e na Figura 1.9 (2) tem-se a representação do mesmo intervalo mas fechado em a ; na Figura 1.9 (3) tem-se a representação do intervalo ilimitado à direita aberto em b e na Figura 1.9 (4) tem-se a representação do mesmo intervalo mas fechado em b . Por fim, na Figura 1.9 (5) tem-se a representação do intervalo ilimitado à esquerda e à direita.

1.15 Exercícios

Exercício 1.15.1. Considere os conjuntos $A = [2, +\infty[$, $B =]-\infty, 3]$, $C =]-1, +\infty[$ e $D =]-\infty, -5[$. Faça cada uma das operações desejadas: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $A \cap D$, $A \cup D$, $B \cap C$, $B \cup C$, $B \cap D$, $B \cup D$, $C \cap D$, $C \cup D$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap D$, $A \cup B \cap D$, $A \cap C \cap D$, $A \cup C \cap D$, $A - B$, $B - A$, $A - C$, $C - A$, $A - D$, $D - A$, $B - C$, $C - B$, $B - D$, $D - B$, $C - D$, $D - C$.

1.16 Desigualdades

Usando as propriedades que a ordem “menor ou igual” tem, é possível definir algumas outras “ordens” para os números reais. Elas são apresentadas abaixo.

Definição 1.16.1. Se a e b são dois números reais, então:

1. diz-se que $a < b$ se, e somente se, $b - a$ for positivo;
2. diz-se que $a > b$ se, e somente se, $a - b$ for positivo;
3. diz-se que $a \leq b$ se, e somente se, for válida qualquer uma das relações: $a = b$ ou $a < b$;
4. diz-se que $a \geq b$ se, e somente se, for válida qualquer uma das relações: $a = b$ ou $a > b$.

Exemplo 1.16.1. 1. $3 < 5$ pois $5 - 3 = 2$ e 2 é positivo;

2. $-10 \leq -6$ pois $-6 - (-10) = 4$ e 4 é positivo;

3. $7 > 2$ pois $7 - 2 = 5$ e 5 é positivo;

4. $\frac{3}{4} \geq \frac{2}{3}$ pois $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$ e $\frac{1}{12}$ é positivo.

Observação 1.16.1. AS afirmações $a < b$, $a > b$, $a \leq b$ e $a \geq b$ são chamadas de **desigualdades**, sendo que as duas primeiras (sem a igualdade) são chamadas de **desigualdades estritas** e as outras duas são chamadas de **desigualdades não-estritas**.

O Teorema 1.16.1 são demonstrados facilmente usando a Definição 1.16.1.

Teorema 1.16.1. Para quaisquer que sejam os números reais a, b e c tem-se que:

1. $a > 0$ se, e somente se, a for positivo;
2. $a < 0$ se, e somente se, a for negativo;

3. se $a > 0$ e $b > 0$, então $a + b > 0$ e $ab > 0$;
4. se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$;
5. se $a < b$, então $a + c < b + c$;
6. se $a < b$ e $0 < c$, então $ac < bc$;
7. se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$;
8. se $a < b$ e $c < d$, então $a + b < c + d$.

Demonstração 1.16.1. Exercício.

□

Observe que o Item 6 do Teorema 1.16.1 estabelece que se ambos os membros de uma desigualdade são multiplicados por um número positivo então o sentido da desigualdade não se altera. Já o Item 7 do Teorema 1.16.1 estabelece que se ambos os lados da desigualdade são multiplicados por um número negativo, então a desigualdade deve ser invertida.

Observação 1.16.2. Como a divisão de dois números reais é o mesmo que multiplicar pelo inverso, o procedimento utilizado pela divisão, em relação ao sentido da desigualdade é o mesmo utilizado pela multiplicação, como apresentados no Teorema 1.16.1.

Geralmente usa-se intervalos para representar **conjuntos-soluções** de desigualdades, sendo que o conjunto-solução de uma desigualdade é o conjunto de todos os números reais que satisfazem a desigualdades.

Exemplo 1.16.2. Encontre o conjunto solução da desigualdade $2 + 3x < 5x + 8$.

SOLUÇÃO:

$2 + 3x < 5x + 8 \Leftrightarrow 2 + 3x - 2 < 5x + 8 - 2 \Leftrightarrow 3x < 5x + 6 \Leftrightarrow 3x - 5x < 5x + 6 - 5x \Leftrightarrow -2x < 6 \Leftrightarrow -2 \left(-\frac{1}{2}\right) > 6 \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > -3$. Portanto, o conjunto solução da desigualdade é o intervalo $] -3, +\infty[$.

Exemplo 1.16.3. Ache o conjunto solução da desigualdade $4 < 3x + 2 \leq 10$.

SOLUÇÃO:

Observe que neste caso existem duas desigualdades: $4 < 3x + 2$ e $3x + 2 \leq 10$. Pode resolvê-las ao mesmo tempo, o que pode não ser tão fácil em todos os casos, ou resolver cada uma em separado e depois encontrar a solução do problema. Assim,

$4 < 3x + 2 \Leftrightarrow 3x > 4 - 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$ e $3x + 2 \leq 10 \Leftrightarrow 3x \leq 10 - 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{3}$. Então, o conjunto-solução da desigualdade tem que satisfazer $x > \frac{2}{3}$ e $x \leq \frac{8}{3}$. Portanto, como visto na Figura 1.10, tem-se que o conjunto-solução da desigualdade é dado por $]\frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$.

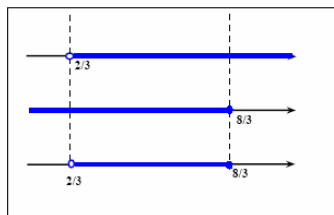


Figura 1.10: Obtendo a solução do Exemplo 1.16.3.

Exemplo 1.16.4. Encontre o conjunto solução da desigualdade $\frac{7}{x} > 2$.

SOLUÇÃO:

Observe que o denominador da desigualdade pode ser positivo ou negativo e, por isto, não podemos multiplicar ambos os lados da desigualdade por x , sem prestar atenção neste detalhe. Assim, $\frac{7}{x} > 2 \Leftrightarrow 2x < 7$ e $x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{7}{2}$. Portanto, o conjunto solução da desigualdade é dado por $]0, \frac{7}{2}[$.

Exemplo 1.16.5. Encontre o conjunto solução da desigualdade $\frac{x}{x-3} < 4$.

SOLUÇÃO:

Tem-se que $\frac{x}{x-3} < 4 \Leftrightarrow \frac{x}{x-3} - 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-4(x-3)}{x-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+12}{x-3} < 0$. Então o conjunto solução da desigualdade é o conjunto de todos os pontos que satisfazem a desigualdade $\frac{-3x+12}{x-3} < 0$. Observe que neste caso tem-se a divisão de duas sentenças, que podem ser positivas ou negativas. Então, é necessário fazer um estudo do sinal destas expressões, pois se ambas tem o mesmo sinal, então o quociente fica positivo e se elas tem o sinal diferentes o quociente fica negativo. Assim, para a expressão do numerador, tem-se que para $x = 4$, o numerador fica zero, para números maiores do que 4 o numerador fica negativo e para números menores do que 4 o numerador fica positivo. Para o denominador, tem-se que para $x = 3$, o denominador fica zero (mesmo ele nunca podendo assumir este valor), para números menores do que 3 o denominador fica negativo e para números maiores do que 3 o denominador fica positivo. Assim, como visto na Figura 1.11, o conjunto solução da desigualdade é dado por $] -\infty, 3[\cup] 4, +\infty [$.

1.17 Exercícios

Exercício 1.17.1. Ache o conjunto solução de cada uma das desigualdades abaixo.

1. $5x + 2 > x - 6$;

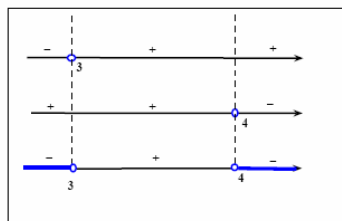


Figura 1.11: Obtendo a solução do Exemplo 1.16.5.

2. $3 - x < 5 + 3x;$

3. $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} \leq 0;$

4. $3 - 2x \geq 9 + 4x;$

5. $13 \geq 2x - 3 \geq 5;$

6. $-2 < 6 - 4x \leq 8;$

7. $2 > -3 - 3x \geq -7;$

8. $2 \leq 5 - 3x < 11;$

9. $\frac{4}{x} - 3 > \frac{2}{x} - 7;$

10. $\frac{5}{x} < \frac{3}{4};$

11. $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1};$

12. $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x};$

13. $x^2 > 4;$

14. $x^2 \leq 9;$

15. $(x-3)(x+5) \geq 0;$

16. $x^2 - 3x + 2 > 0;$

17. $1 - x - 2x^2 \geq 0;$

18. $x^2 + 3x + 1 > 0;$

19. $4x^2 + 9x < 9;$

$$20. 2x^2 - 6x + 3 < 0;$$

$$21. \frac{1}{3x-7} \geq \frac{4}{3-2x};$$

$$22. x^3 + 1 > x^2 + x.$$

1.18 Valor Absoluto

O conceito de valor absoluto de um número real é utilizado em algumas definições importantes, como a definição de **Limite de Funções**. Também, em muitos casos, é necessário trabalhar com desigualdades envolvendo o módulo. Assim, para relembrar, tem-se que:

Definição 1.18.1. O valor absoluto de x , denotado por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (1.35)$$

Da Definição 1.18.1, tem-se que o valor absoluto de um número é sempre maior ou igual a zero. Geometricamente, o módulo de um número pode ser enxergado como sendo a sua distância ao zero e, para um caso geral, $|a - b|$ pode ser enxergado como sendo a distância de a a b , sem a preocupação de quem é o maior número.

Teorema 1.18.1. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, \forall a > 0$.

Demonstração 1.18.1. $|x| < a \Leftrightarrow x < a \text{ e } x \geq 0$, ou $-x < a \text{ e } x < 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < a$ ou $-a < x < 0 \Leftrightarrow -a < x < a$

□

Corolário 1.18.1. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \forall a > 0$.

Demonstração 1.18.1. Exercício.

□

Teorema 1.18.2. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ou } x > a, \forall a > 0$.

Demonstração 1.18.2. Exercício.

□

Corolário 1.18.2. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a, \forall a > 0$.

Demonstração 1.18.2. Exercício.

□

Exemplo 1.18.1. Resolva cada uma das equações modulares a seguir: $|3x + 2| = 5$; $|2x - 1| = |4x + 3|$ e $|5x + 4| = -3$.

SOLUÇÃO:

Para o primeiro caso tem-se que $|3x + 2| = 5 \Leftrightarrow 3x + 2 = 5$ ou $3x + 2 = -5 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{7}{3}$.

Para o segundo caso, tem-se que ou os dois tem o mesmo sinal ou os dois tem sinais diferentes, mas com o mesmo módulo. Assim, $2x - 1 = 4x + 3$ ou $2x - 1 = -(4x + 3)$, ou seja, $2x = -4$ ou $6x = -2$. Logo, $x = -2$ ou $x = -\frac{1}{3}$.

Para o último caso, observe que o módulo é igual a um número negativo, o que é um absurdo, visto que o valor absoluto de um número é sempre maior ou igual a zero.

Exemplo 1.18.2. Ache o conjunto solução da inequação $|x - 5| < 4$.

SOLUÇÃO:

$|x - 5| < 4 \Leftrightarrow -4 < x - 5 < 4 \Leftrightarrow 5 - 4 < x < 5 + 4 \Leftrightarrow 1 < x < 9$. Portanto, o conjunto solução da inequação é $S =]1, 9[$.

Exemplo 1.18.3. Ache o conjunto solução da inequação $|3x + 2| > 5$.

SOLUÇÃO:

$|3x + 2| > 5 \Leftrightarrow 3x + 2 > 5$ ou $3x + 2 < -5 \Leftrightarrow 3x > 3$ ou $3x < -7 \Leftrightarrow x > 1$ ou $x < -\frac{7}{3}$.

Logo, o conjunto solução da equação é dada por $] -\infty, -\frac{7}{3}[\cup]1, +\infty[$.

Observação 1.18.1. O símbolo $\sqrt{a}$, para $a \geq 0$, representa o único número real x não negativo tal que $x^2 = a$.

Exemplo 1.18.4. Ache todos os valores de x para os quais a raiz $\sqrt{x^2 + 7x + 12}$ representa um número real.

SOLUÇÃO:

$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3) \Rightarrow \sqrt{x^2 + 7x + 12}$ é real $\Leftrightarrow (x + 4)(x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -4$ ou $x \geq -3$. Logo, a raiz representa um número real para todo $x \in] -\infty, -4] \cup [-3, +\infty[$.

Teorema 1.18.3. Se $a, b \in \mathbb{R}$, então:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|;$

2. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \forall b \neq 0;$

3. (Desigualdade Triangular) $|a + b| \leq |a| + |b|$;

4. $|a - b| \leq |a| + |b|$;

5. $|a| - |b| \leq |a - b|$.

Demonstração 1.18.3. Exercício.

□

1.19 Exercícios

Exercício 1.19.1. *Ache os valores de x para que seja válida nos números reais cada uma das raízes abaixo.*

1. $\sqrt{8x - 5}$;

2. $\sqrt{x^2 - 16}$;

3. $\sqrt{x^2 - 3x - 10}$;

4. $\sqrt{2x^2 + 5x - 3}$;

5. $\sqrt[4]{x^2 - 5x + 4}$;

6. $\sqrt[6]{x^2 + 2x - 1}$.

Exercício 1.19.2. *Ache o conjunto solução de cada uma das desigualdades abaixo.*

1. $|4x + 3| = 7$;

2. $||3x - 8| = 4$;

3. $|5x - 3| = |3x + 5|$;

4. $|x - 2| = |3 - 2x|$;

5. $|7x| = 4 - x$;

6. $2x + 3 = |4x + 5|$;

7. $\left| \frac{x + 2}{x - 2} \right| = 5$;

8. $\left| \frac{3x + 8}{2x - 3} \right| = 4$;

9. $|x + 4| < 7$;

10. $|2x - 5| < 3$;

11. $|3x - 4| \leq 2$;
12. $|3x + 2| \geq 1$;
13. $|5 - x| > 7$;
14. $|3 - x| < 5$;
15. $|7 - 4x| \leq 9$;
16. $|6 - 2x| \geq 7$;
17. $|2x - 5| > 3$;
18. $|x + 4| \leq |2x - 6|$;
19. $|3x| > |6 - 3x|$;
20. $|3 + 2x| < |4 - x|$;
21. $|9 - 2x| \geq |4x|$;
22. $|5 - 2x| \geq 7$;
23. $\left| \frac{x + 2}{2x - 3} \right| < 4$;
24. $\left| \frac{6 - 5x}{3 + x} \right| \leq \frac{1}{2}$.

1.20 Relações

Um **par** é o conjunto formado por quaisquer dois elementos. Por exemplo, os conjuntos $\{1, a\}$, $\{3, -1\}$ e $\{bola, jaca\}$ são exemplos de pares. Lembre-se que dois conjuntos são iguais se eles apresentam os mesmos elementos e, pois isto, os pares $\{1, a\}$ e $\{a, 1\}$ não são distintos. Para transformar estes pares em dois pares distintos é estabelecido uma ordem e com isto obtém-se os **pares ordenados**.

Definição 1.20.1. *Para cada par de elementos a e b existe um terceiro elemento, chamado de **par ordenado**, denotado por (a, b) , de forma que*

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d. \quad (1.36)$$

Observe que os pares ordenados $(3, 5)$ e $(5, 3)$ são dois pares distintos, visto que na primeira coordenada do par $(3, 5)$ é o 3 e a primeira coordenada do par $(5, 3)$ é o 5 que é diferente de 3, logo os pares são distintos.

Definição 1.20.2. *O conjunto de todos os pares ordenados de números reais é chamado de plano numérico real (ou simplesmente plano real), sendo denotado por $\mathbb{R}^2$. Cada par ordenado do plano real é chamado de ponto do plano.*

Da mesma forma que é possível estabelecer uma relação do conjunto $\mathbb{R}$ com a reta numérica (espaço unidimensional), é possível estabelecer uma relação do $\mathbb{R}^2$ com os pontos de um plano geométrico (espaço bidimensional). Toma-se uma reta horizontal no plano geométrico, sendo chamada de *eixo das abscissas*. Em seguida toma-se uma reta vertical chamada de *eixo das ordenadas*. O ponto de encontro das duas retas é chamado de origem e é denotado por O . A Figura 1.12 apresenta uma representação do $\mathbb{R}^2$, que é chamado de *plano cartesiano*.

Geralmente representa-se os pontos do plano cartesiano por (x, y) e, por isto, o x representa as abscissas e o y representa as ordenadas. Uma consequência disso é que em vez de se chamar de eixo das abscissas e eixo das ordenadas, chama-se de eixo x e eixo y , respectivamente.

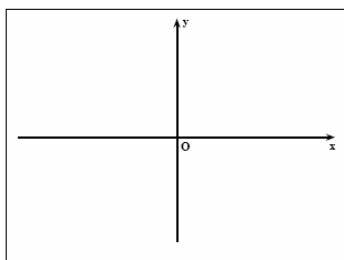


Figura 1.12: Um exemplo de representação do plano cartesiano.

Depois de estabelecido o plano cartesiano escolhe-se uma medida de comprimento, sendo que geralmente usa-se a mesma para os dois eixos. O sentido de crescimento que geralmente é usado é para a direita, no eixo das abscissas, e para cima, no eixo das ordenadas. Com isto tem-se que a direita da origem os pontos do eixo x são positivos e a esquerda são negativos e acima da origem os pontos do eixo y são positivos e abaixo são negativos. Na origem tem-se abscissa zero e ordenada zero. Assim, tem-se que $O = (0, 0)$.

Para cada ponto P do plano existe uma abscissa x e uma ordenada y que o representa no plano cartesiano. Assim, tem-se que $P = (x, y)$, podendo ser representado simplesmente por $P(x, y)$. Para representar o ponto P no plano cartesiano proceda-se como a seguir: marque a abscissa x no eixo x ; marque a ordenada y no eixo y ; trace a paralela ao eixo y , passando pelo ponto x , e trace a paralela ao eixo x passando pelo ponto y . Assim, o ponto de encontro das duas paralelas é o ponto P procurado. Uma exemplificação deste procedimento é dado pela Figura 1.13.

Definição 1.20.3. Num ponto $P = (x, y)$ a abscissa x é chamada de *coordenada x* e a ordenada y é chamada de *coordenada y* . O par ordenado (x, y) é chamado de *coordenadas cartesianas retangulares de P* .

O conjunto formado pelo eixo x e o eixo y é chamado de eixos coordenado. Observe que o eixo coordenado divide o plano em quatro regiões distintas, chamadas de **quadrantes**. O primeiro quadrante é considerado o que tem abscissas e ordenadas positivas, o segundo quadrante tem abscissas negativa e ordenada negativa, o terceiro tem

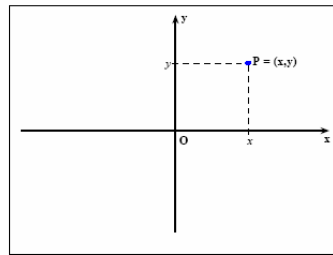


Figura 1.13: Um exemplo de representação de um ponto P .

abscissas e ordenadas negativas e o quarto quadrante tem abscissa positiva e ordenada negativa. Assim, o primeiro quadrante é o superior a direita e os outros são obtidos no sentido anti-horário, como visto na Figura 1.14.

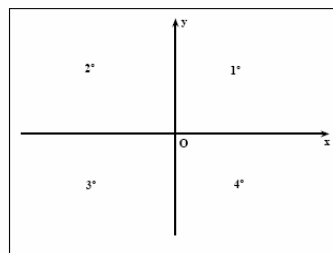
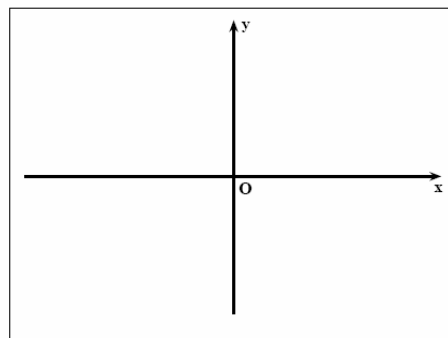


Figura 1.14: Representação dos quadrantes no plano cartesiano.

Exemplo 1.20.1. *Represente os pontos a seguir num plano cartesiano:* $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(-4, 5)$, $(5, -4)$, $(2, 0)$, $(-6, 0)$, $(0, -4)$, $(0, 2)$, $(-3, -5)$, $(-5, -3)$, $(3, -2)$ e $(-2, 3)$.



Definição 1.20.4. Sejam A e B dois conjuntos. Diz-se que o **produto cartesiano** de A por B , denotado por $A \times B$, o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) de forma que $x \in A$ e $y \in B$, ou seja,

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}. \quad (1.37)$$

Observação 1.20.1. O produto cartesiano de qualquer conjunto com o conjunto vazio é um conjunto também vazio, ou seja:

$$A \times \emptyset = \emptyset, \quad \emptyset \times A = \emptyset \text{ e } \emptyset \times \emptyset = \emptyset. \quad (1.38)$$

Exemplo 1.20.2. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. Então:

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\} \text{ e}$$

$$A \times B = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}.$$

Observação 1.20.2. 1. Quando se faz o produto cartesiano entre dois conjuntos iguais, por exemplo $A \times A$, usa-se a notação A^2 e, por isto, tem-se que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. Se A e B são dois conjuntos distintos, então tem-se que $A \times B \neq B \times A$, ou seja, o produto cartesiano não é uma operação comutativa.

3. Se A e B são limitados e se eles tem m e n elementos, respectivamente, então $A \times B$ também é limitado e $A \times B$ vai ter $m \cdot n$ elementos.

4. Se A ou B são dois conjuntos não vazios e um deles é ilimitado então, $A \times B$ também é ilimitado.

Exemplo 1.20.3. Seja $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x < 3\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Encontre $A \times B$ e $B \times A$. Faça um esboço destes produtos cartesianos num plano.

SOLUÇÃO:

Observe que para cada elemento de B , tem-se que a abscissa é um número em $1 \leq x < 3$, ou seja, $A \times B = \{(x, 1) \text{ ou } (x, 2) \text{ ou } (x, 3) | 1 \leq x < 3\}$. Já para $B \times A$ tem-se que para cada abscissa de B a ordenada varia entre $1 \leq x < 3$ e, por isto, $B \times A = \{(1, x) \text{ ou } (2, x) \text{ ou } (3, x) | 1 \leq x < 3\}$. A Figura 1.15 traz um esboço de $A \times B$ e a Figura 1.16 traz um esboço de $B \times A$.

Exemplo 1.20.4. Seja $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 5\}$. Encontre $A \times B$ e $B \times A$. Faça um esboço destes produtos cartesianos num plano.

SOLUÇÃO:

Para este caso tem-se que os pares ordenados de $A \times B$ são da forma (x, y) com $1 \leq x \leq 3$ e $1 < y < 5$ e, por isto, $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 3 \text{ e } 1 < y < 5\}$. Já para $B \times A$ tem-se $B \times A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < x < 5 \text{ e } 1 \leq y \leq 3\}$. A Figura 1.17 traz um esboço de $A \times B$ e a Figura 1.18 traz um esboço de $B \times A$.

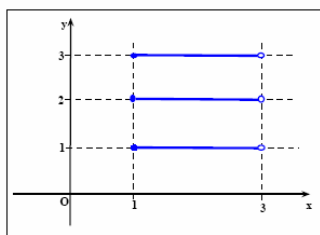


Figura 1.15: Representação gráfica de $A \times B$.

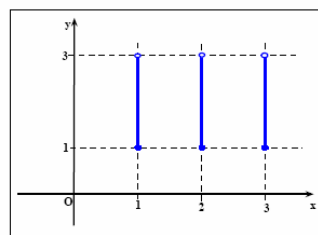


Figura 1.16: Representação gráfica de $B \times A$.

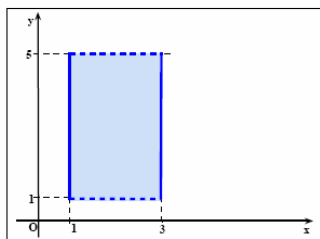


Figura 1.17: Representação gráfica de $A \times B$.

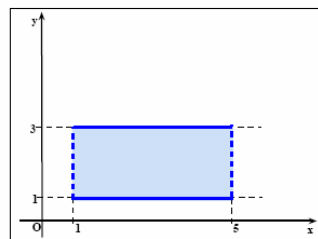


Figura 1.18: Representação gráfica de $B \times A$.

1.21 Relação Binária

Definição 1.21.1. Chama-se **Relação Binária de A em B** , ou simplesmente **Relação de A em B** , qualquer subconjunto de $A \times B$. Geralmente, representa-se uma relação por $\mathfrak{R}$.

Exemplo 1.21.1. Considere o conjunto $A = \{2, 3, 4\}$ e o conjunto $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Encontre a Relação Binária de $A \times B$ onde a abscissa é divisor da ordenada.

SOLUÇÃO:

A relação $\mathfrak{R}$ procurada é formada por todos os pares ordenados (x, y) contidos em $A \times B$ de forma que $x|y$ ou seja, todos os pares ordenados (x, y) contidos em $A \times B$ de forma que y seja múltiplo de x . Observe que $A \times B = (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\}$. Além disso, tem-se que $2|2, 4, 6$, $3|3, 6$ e $4|4$ e, por isto, $\mathfrak{R} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$.

Observação 1.21.1. 1. $\mathfrak{R}$ é uma relação de A em $B \Leftrightarrow \mathfrak{R} \subset A \times B$.

2. Se A e B são dois conjuntos iguais diz-se simplesmente que $\mathfrak{R} \subset A \times A$ é uma relação em A .

3. O conjunto A é chamado de **conjunto de partida** da relação $\mathfrak{R}$.

4. O conjunto B é chamado de **conjunto de chegada** (ou **Contradomínio**) da relação $\mathfrak{R}$.
5. Quando um par ordenado (x, y) pertence a relação $\mathfrak{R}$, escreve-se $x\mathfrak{R}y$ e lê-se “ x erre y ”. Assim, tem-se que $(x, y) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow x\mathfrak{R}y$.
6. Quando um par ordenado (x, y) não pertence a relação $\mathfrak{R}$, escreve-se $x \not\mathfrak{R}y$ e lê-se “ x não erre y ”. Assim, tem-se que $(x, y) \notin \mathfrak{R} \Leftrightarrow x \not\mathfrak{R}y$.

Exemplo 1.21.2. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Encontre a relação $\mathfrak{R} = \{(x, y) \in Ax B | x < y\}$.

SOLUÇÃO:

Tem-se que $1 < 2, 3, 4$, $2 < 3, 4$, $3 < 4$ e 4 e 5 não são menores do que ninguém. Então $\mathfrak{R} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

Exemplo 1.21.3. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Encontre a relação $\mathfrak{R}$ de forma que $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow y = x + 2$.

SOLUÇÃO:

Para encontrar a relação $\mathfrak{R}$ é necessário encontrar todos os pares (x, y) de forma que $y = x + 2$. Assim, tem-se que $\mathfrak{R} = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$.

Exemplo 1.21.4. Seja $A = \{-1, 0, 1, 2\}$. Encontre a relação $\mathfrak{R} = \{(x, y) \in A^2 | x^2 = y^2\}$.

SOLUÇÃO:

Tem-se que $\mathfrak{R} = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1), (0, 0), (2, 2)\}$.

Definição 1.21.2. Seja $\mathfrak{R}$ uma relação de A em B . Chama-se o conjunto **Domínio** da relação $\mathfrak{R}$, e denota-se por $D_{\mathfrak{R}}$, o conjunto formado por todos os elementos do conjunto de partida A que formam pares ordenados em $\mathfrak{R}$.

Observação 1.21.2. $x \in D_{\mathfrak{R}} \Leftrightarrow \exists y \in B | (x, y) \in \mathfrak{R}$.

Definição 1.21.3. Seja $\mathfrak{R}$ uma relação de A em B . Chama-se o conjunto **Imagem** da relação $\mathfrak{R}$, e denota-se por $Im_{\mathfrak{R}}$, o conjunto formado por todos os elementos do contradomínio B que se relacionam com algum elemento do domínio de $\mathfrak{R}$.

Observação 1.21.3. $y \in Im_{\mathfrak{R}} \Leftrightarrow \exists x \in A | (x, y) \in \mathfrak{R}$.

Observação 1.21.4. Decorre da definição que $D_{\mathfrak{R}} \subset A$ e $Im_{\mathfrak{R}} \subset B$.

Exemplo 1.21.5. Seja $A = \{0, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Encontre o domínio e a imagem da relação $\mathfrak{R} = \{(x, y) \in Ax B | y \text{ é múltiplo de } x\}$.

SOLUÇÃO:

Tem-se $\mathfrak{R} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$ e, por isto, $D_{\mathfrak{R}} = \{2, 3, 4\}$ e $Im_{\mathfrak{R}} = \{2, 3, 4, 6\}$.

Observação 1.21.5. Uma relação $\mathfrak{R}$ é um conjunto de pares ordenados e por isto é possível fazer a sua representação geométrica no plano cartesiano, onde os valores da abscissa estão no conjunto $D_{\mathfrak{R}}$ e os valores das ordenadas estão no conjunto $Im_{\mathfrak{R}}$.

Definição 1.21.4. O Gráfico de uma relação é o conjunto formado por dos os pontos $(x, y) \in Ax B$ tais que $x \mathfrak{R} y$. Assim,

$$G_{\mathfrak{R}} = \{(x, y) \in Ax B | x \mathfrak{R} y\}. \quad (1.39)$$

Definição 1.21.5. Seja $\mathfrak{R}$ uma relação de A em B . O conjunto $\mathfrak{R}^{-1} = \{(y, x) \in Bx A | (x, y) \in \mathfrak{R}\}$ também é uma relação binária de B em A e ele é chamado de **Relação Inversa** de $\mathfrak{R}$.

Observação 1.21.6. 1. $(y, x) \in \mathfrak{R}^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathfrak{R}$.

2. Os pares ordenados de $\mathfrak{R}^{-1}$ são obtidos trocando as abscissas com as ordenadas dos pares ordenados de $\mathfrak{R}$.

Exemplo 1.21.6. Seja $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Encontre $\mathfrak{R} = \{(x, y) \in Ax B | x < y\}$ e $\mathfrak{R}^{-1}$.

SOLUÇÃO:

Tem-se que $\mathfrak{R} = \{(2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7), (5, 7)\}$. Observe que a relação inversa de B em A é obtida encontrando todos os pontos $(x, y) \in Bx A$ tais que $x > y$, ou seja, $\mathfrak{R}^{-1} = \{(3, 2), (5, 2), (7, 2), (5, 3), (7, 3), (5, 4), (7, 4), (7, 5)\}$.

O conjunto domínio da relação e da relação inversa juntamente com os respectivos conjuntos imagem apresentam propriedades importantes que não podem ser esquecidas:

1. $D_{\mathfrak{R}^{-1}} = Im_{\mathfrak{R}}$;
2. $Im_{\mathfrak{R}^{-1}} = D_{\mathfrak{R}}$;
3. $(\mathfrak{R}^{-1})^{-1} = \mathfrak{R}$.

Definição 1.21.6. Seja A um conjunto e seja $\mathfrak{R}$ uma relação sobre A . Diz-se que $\mathfrak{R}$ é uma **Relação Reflexiva** se $x \mathfrak{R} x$ para todo $x \in D_{\mathfrak{R}}$.

Exemplo 1.21.7. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. A Relação $\mathfrak{R}_1 = \{(x, y) \in A^2 | x = y\}$ é reflexiva, mas a relação $\mathfrak{R}_2 = \{(x, y) \in A^2 | x = 1 + y\}$ não é reflexiva, visto que $1 \not\mathfrak{R}_2 1$.

Definição 1.21.7. Seja A um conjunto e seja $\mathfrak{R}$ uma relação sobre A . Diz-se que $\mathfrak{R}$ é uma **Relação Simétrica** se para todo $x \mathfrak{R} y$ então tem-se que $y \mathfrak{R} x$.

Exemplo 1.21.8. Seja A o conjunto de todas as retas do plano. A relação de paralelismo é uma relação simétrica; a relação de perpendicularidade também é simétrica em A . Pergunta: elas são reflexivas?

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. A Relação $\mathfrak{R} = \{(x, y) \in A^2 | x = 1 + y\}$. Esta relação não é simétrica, visto que $1\mathfrak{R}2$ mas $2\not\mathfrak{R}1$.

Definição 1.21.8. Seja A um conjunto e seja $\mathfrak{R}$ uma relação sobre A . Diz-se que $\mathfrak{R}$ é uma **Relação Transitiva** se para todo $x\mathfrak{R}y$ e $y\mathfrak{R}z$, então tem-se que $x\mathfrak{R}z$.

Exemplo 1.21.9. A relação de ordem usual em $\mathfrak{R}$ é uma relação transitiva. Seja A o conjunto de todas as retas do plano. A relação de perpendicularidade não é transitiva.

Definição 1.21.9. Seja A um conjunto e seja $\mathfrak{R}$ uma relação sobre A . Diz-se que $\mathfrak{R}$ é uma **Relação de Equivalência** se, e somente se, $\mathfrak{R}$ é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 1.21.10. Seja A o conjunto de todas as retas do plano. A relação de paralelismo é uma relação de equivalência.

Exemplo 1.21.11. Seja $A = \{x \in \mathbb{Z} | -10 \leq x \leq 10\}$ e considere $\mathfrak{R}$ como sendo a relação em A tal que $a\mathfrak{R}b \Leftrightarrow a^2 + 2a = b^2 + 2b$. Prove que esta relação é uma relação de equivalência.

SOLUÇÃO:

1 - $\mathfrak{R}$ é uma relação reflexiva. De fato: $a\mathfrak{R}a \Leftrightarrow a^2 + 2a = a^2 + 2a$, o que verdade para todo $a \in A$;

2 - $\mathfrak{R}$ é simétrica. De fato: $a\mathfrak{R}b \Leftrightarrow a^2 + 2a = b^2 + 2b \Leftrightarrow b^2 + 2b = a^2 + 2a \Leftrightarrow b\mathfrak{R}a$;

3 - $\mathfrak{R}$ é transitiva. De fato: $a\mathfrak{R}b \Leftrightarrow a^2 + 2a = b^2 + 2b$ e $b\mathfrak{R}c \Leftrightarrow b^2 + 2b = c^2 + 2c$, então $a^2 + 2a = b^2 + 2b = c^2 + 2c \Leftrightarrow a\mathfrak{R}c$.

Portanto a relação $\mathfrak{R}$ é uma relação de equivalência.

Definição 1.21.10. Diz-se que a é **congruente a b módulo m** , e escreve-se $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, existe um inteiro q de forma que $a - b = qm$.

Observação 1.21.7. Esta notação foi implantada por **Carl Friedrich Gauss (1777-1855)**.

Exemplo 1.21.12. $5 \equiv 2 \pmod{3}$, pois $5 - 2 = 3$;
 $27 \equiv 3 \pmod{6}$, pois $27 - 3 = 24 = 4 \cdot 6$.

Teorema 1.21.1. A relação de congruência módulo m é uma relação de equivalência.

Demonstração 1.21.1. Exercício.

□

Definição 1.21.11. Seja A um conjunto não vazio e seja $\mathfrak{R}$ uma relação de equivalência sobre A . Para todo $a \in A$ o subconjunto $\bar{a} = \{x \in A | x\mathfrak{R}a\}$ é chamado de **classe de equivalência módulo $\mathfrak{R}$ determinado pelo elemento $a \in A$** . Neste caso, diz-se que a é um representante de $\bar{a}$.

Observação 1.21.8. A classe de equivalência $\bar{a}$ depende da relação $\mathfrak{R}$, mas não depende do representante, isto é, se $a, b \in \bar{a}$, então $\bar{a} = \bar{b}$.

Definição 1.21.12. Seja A um conjunto e seja $\mathfrak{R}$ uma relação sobre A . Diz-se que $\mathfrak{R}$ é uma **Relação Anti-Simétrica** se para todo $x, y \in A$, se $x\mathfrak{R}y$ e $y\mathfrak{R}x$, então $x = y$.

Exemplo 1.21.13. A relação de ordem “menor ou igual” no conjunto dos números inteiros (e também em qualquer outro conjunto numérico) é uma relação anti-simétrica.

1.22 Exercícios

Exercício 1.22.1. Dado os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $C = \{-1, 0, 1\}$, represente cada conjunto abaixo enumerando os seus elementos e fazendo um esboço dos elementos num plano cartesiano:

1. AxB ;
2. AxC ;
3. BxA ;
4. CxA ;
5. BxC ;
6. CxB .

Exercício 1.22.2. Dado os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 4\}$, represente cada conjunto abaixo enumerando os seus elementos e fazendo um esboço dos elementos num plano cartesiano:

1. AxB ;
2. BxA ;
3. $AxB \cup BxA$;

Exercício 1.22.3. Dado os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x \leq 4\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 3\}$, represente cada conjunto abaixo enumerando os seus elementos e fazendo um esboço dos elementos num plano cartesiano:

1. AxB ;
2. AxC ;
3. BxA ;
4. CxA ;
5. BxC ;

6. CxB .

Exercício 1.22.4. Dado os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 4\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$, represente cada conjunto abaixo enumerando os seus elementos e fazendo um esboço dos elementos num plano cartesiano:

1. AxB ;
2. AxC ;
3. BxA ;
4. CxA ;
5. BxC ;
6. CxB .

Exercício 1.22.7. Seja $A = 2, 3, 5, 30, 36, 60$ e seja $\mathfrak{R}$ a relação entre a e b de forma que $a\mathfrak{R}b$, e somente se, a e b são primos entre si. Responda as perguntas abaixo:

1. Esta relação é uma relação simétrica?
2. É uma relação transitiva?
3. É uma relação associativa?
4. É uma relação de equivalência?
5. É uma relação anti-simétrica?
6. Escreva o domínio e a imagem desta relação.

Capítulo 2

Função

2.1 Introdução

No capítulo anterior, discutimos vários aspectos da teoria dos conjuntos: operações, elementos, relações, etc. Neste capítulo a teoria dos conjuntos será vista sob um outro ponto de vista. Na verdade, será analisado um certo tipo de relação, com uma certa particularidade.

Muitos fatos matemáticos são visto como sendo um estudo de funções apropriadas. Em outras palavras, o conceito de aplicação (ou função) que vai ser estudado é muito usado e se constitui num dos pontos mais importante da matemática.

Para apresentar a idéia de função, observe o Exemplo 2.1.1.

Exemplo 2.1.1. *O canto dos grilos é um som familiar no campo numa noite quente. O ritmo no qual os grilos cantam depende da temperatura: quando está quente eles “cricrilam” mais do que em qualquer outro tempo. A Tabela 2.1.1 mostra como o ritmo e a temperatura estão relacionados.*

Temperatura em Graus Farenheit (*)	50	60	70	80	...
Número de Cricrilos em quinze segundos	10	20	30	40	...

(*) A relação entre graus Farenheit (F) e graus Celsius (C) é dada pela equação: $F = 1,8C + 32$

Para cada temperatura desta tabela, existe um correspondente número de cricrilos em quinze segundos. Observe que, para cada temperatura existe um único número correspondente. Um matemático diria que o número de cricrilos em quinze segundos está em função da temperatura.

Uma maneira de representar uma função é com uma tabela, como visto na Tabela 2.1.1. Uma outra maneira é escrever uma fórmula. Na Tabela 2.1.1, cada número da segunda linha é o correspondente a um número da primeira linha menos 40. Se chamamos F a temperatura em graus Fahrenheit e n representa o número de cricrilos em quinze segundos, pode-se escrever: $n = F - 40$ ou $F = n + 40$. As duas letras nas fórmulas acima são as **variáveis**. Na primeira, n varia de acordo com a variação de F , isto é, n está em função de F . Na segunda, F varia de acordo com a variação de n , isto é, F está

em função de n . A fórmula de uma função permite escrever a sua correspondente Tabela. Basta escrever os números que se queira para a primeira linha e substituí-los na fórmula para achar o número correspondente da segunda linha.

Agora, considere os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e as seguintes relações binárias de A em B :

1. $R = \{(x, y) \in AxB | y = x + 1\};$

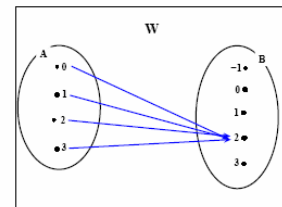
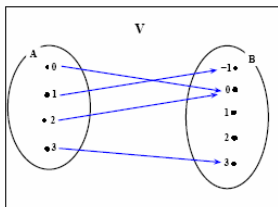
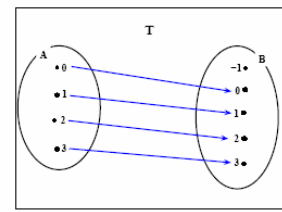
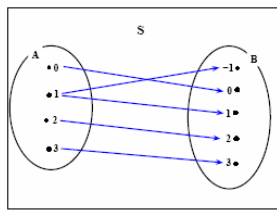
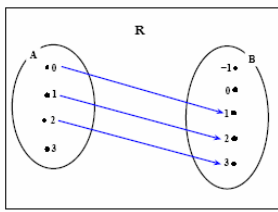
2. $S = \{(x, y) \in AxB | y^2 = x^2\};$

3. $T = \{(x, y) \in AxB | y = x\};$

4. $V = \{(x, y) \in AxB | y = (x - 1)^2 - 1\};$

5. $W = \{(x, y) \in AxB | y = 2\};$

Observe a representação gráfica de cada uma destas relações:



Da relação R é possível observar que para cada elemento $x \in A$, exceto o 3, existe um único elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$. Para o elemento 3 não existe $y \in B$ tal que $(3, y) \in R$. Já para a relação S tem-se que para cada elemento $x \in A$, exceto o -1 , existe um único elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in S$. Para o elemento -1 existe dois elementos $y \in B$ tais que $(-1, y) \in T$, que são o 1 e o -1 . Para a relação V tem-se que para todo elemento $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in V$. Por fim, para a

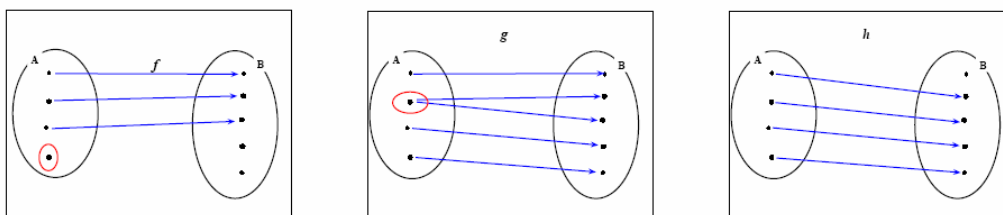
relação W tem-se que para todo elemento $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in W$.

2.2 Definição e Exemplos

Observe que as relações T , V e W , apresentados na última seção, tem a seguinte particularidade: **para todos os elementos** $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$ tal que (x, y) esteja na relação. E, por isto, este tipo de relação recebe o nome de “aplicação de A em B ” (ou função definida de A em B).

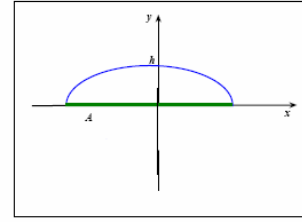
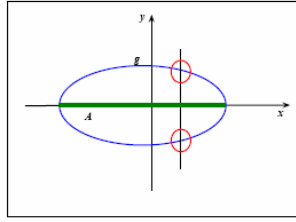
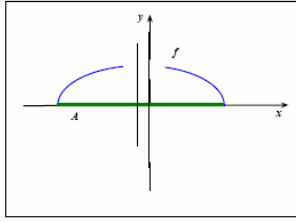
Definição 2.2.1. Uma **aplicação** f de um conjunto A em um conjunto B , ou uma **função** f de A em B , que é denotado por $f : A \rightarrow B$, é uma relação f de A em B que apresenta a seguinte propriedade: $\forall x \in A$, existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Observação 2.2.1. 1 - Para verificar se um diagrama de Venn representa uma função, observe se todo elemento do conjunto domínio da relação está ligado a algum elemento da imagem da relação, veja os diagramas na figura abaixo. A primeira figura, relação f , não representa um função visto que tem um elemento do conjunto A que não se relaciona com nenhum elemento do conjunto B ; o segundo diagrama, da relação g , não representa uma função pois no conjunto A tem um elemento que se relaciona com dois elementos diferente do conjunto imagem B . Mas o terceiro diagrama, da relação h , representa uma função, visto que todos os elementos do conjunto domínio estão relacionados com um único elemento da imagem.



2 - Também é possível verificar se uma representação cartesiana de uma relação é, ou não, para isto, traça-se retas paralelas ao eixo das ordenadas, de forma que toque todos os pontos do gráfico. Se algumas destas retas interceptar pontos do domínio da relação e não interceptar o esboço do gráfico ou se uma destas retas interceptar o esboço do gráfico mais de uma vez, tem-se que a referida relação não representa uma função. Por exemplo,

Observe que na primeira representação, a relação f apresenta uma parte do conjunto A que não se relaciona com nenhum elemento do contradomínio e, por isto, ela não representa uma função. Já a relação g não representa uma função visto que existem elementos do seu domínio relacionados com dois elementos do contradomínio e, também por isto, esta relação não representa uma função. Por fim, a relação h representa uma função, visto que todos os elementos do conjunto A estão relacionados com algum elemento do contradomínio.



Observação 2.2.2. Geralmente existe uma expressão $y = f(x)$ que expressa todos os elementos da relação em função dos elementos do conjunto domínio e, por isto, costuma-se representar a aplicação f por notação de conjuntos:

$$f = \{(x, y) | x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}. \quad (2.1)$$

Assim, para representar uma função f , de A em B , segundo uma lei de formação $y = f(x)$, é representada por:

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Exemplo 2.2.1. A função $f: A \rightarrow B$ $x \mapsto 2x$ associa a cada número real x ao número $y = 2x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.2. A função $f: A \rightarrow B$ $x \mapsto x^2$ associa a cada número real x ao número $y = x^2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.3. A função $f: A \rightarrow B$ $x \mapsto \sqrt{x}$ associa a cada número real não negativo x ao número $y = \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$.

Observação 2.2.3. Assim como na relação tem-se o conjunto domínio, contradomínio e imagem de uma função. O conjunto domínio é formado por todos os possíveis valores que a abscissas podem assumir; o contra domínio é formado por todos os valores que as ordenadas podem assumir e o conjunto imagem é formado por todos os elementos do contradomínio que se relacionam com algum elemento do domínio. Em funções reais de uma variável o contradomínio sempre é o conjunto $\mathbb{R}$.

Observação 2.2.4. Uma função fica completamente definida quando são apresentado o conjunto domínio, o conjunto imagem e a relação $y = f(x)$. Contudo, quando não fica explicito qual é o conjunto domínio, considera-se o maior conjunto que seja possível, como conjunto domínio.

Exemplo 2.2.4. A função $f: A \rightarrow B$ $x \mapsto 2x$ tem como conjunto domínio os números reais.

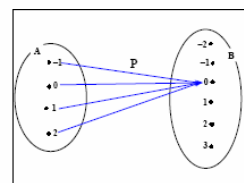
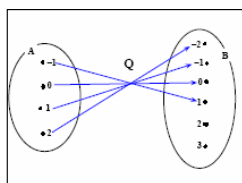
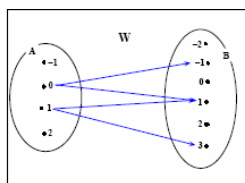
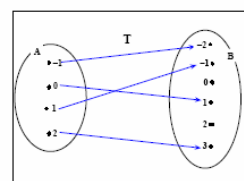
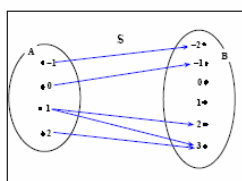
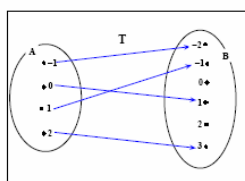
Exemplo 2.2.5. A função $f: A \rightarrow B$ $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ tem como conjunto domínio os números reais menos o 2, visto que não existe divisão por zero.

Exemplo 2.2.6. A função $f: A \rightarrow B$ $x \mapsto \sqrt{x}$ tem como conjunto domínio os números reais não negativos, pois não existe nos reais raiz de índice par, de número negativo.

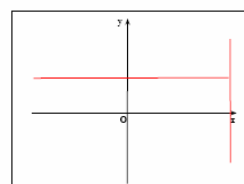
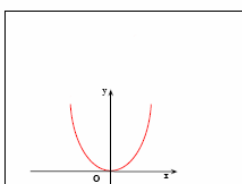
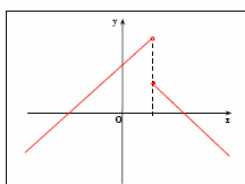
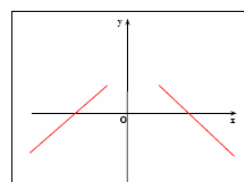
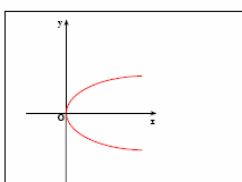
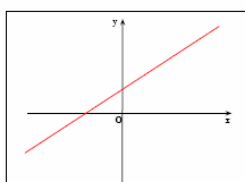
Definição 2.2.2. Duas funções $f: A \rightarrow B$ $x \mapsto f(x)$ e $g: C \rightarrow D$ $x \mapsto g(x)$ são ditas serem iguais se, e somente se, $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.

2.3 Exercícios

Exercício 2.3.1. Estabeleça se cada uma das relações abaixo representam funções de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$:



Exercício 2.3.2. Quais das relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ abaixo representam funções:



Exercício 2.3.3. Escreva em notação matemática cada uma das aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ abaixo:

1. f associa a cada número real ao seu oposto;
2. g associa a cada número real ao seu cubo;
3. h associa a cada número real ao seu quadrado menos 1;
4. k associa a cada número real ao número 2.

Exercício 2.3.4. Determine o conjunto domínio de forma que a expressão abaixo represente uma função.

1. $f(x) = 3x + 2$;
2. $g(x) = \frac{1}{x+2}$;
3. $h(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$;
4. $p(x) = \sqrt{x-1}$;
5. $t(x) = -\frac{1}{\sqrt{x+1}}$;
6. $q(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-2}$;
7. $r(x) = \sqrt[3]{x+2}$;
8. $q(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2x+3}}$;
9. $k(x) = \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x-3}$;

2.4 Propriedades envolvendo funções e outras definições

Agora, é apresentado a definição das operações envolvendo função. Nesta definição, novas operações são formadas a partir de funções dadas, usando somas e produtos de valores funcionais.

Definição 2.4.1. Dadas as funções f e g :

1. a sua **soma**, denotada por $f + g$, é a função definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
2. a sua **diferença**, denotada por $f - g$, é a função definida por $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$;
3. o seu **produto**, denotado por $f \cdot g$, é a função definida por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
4. o seu **quociente**, denotado por f/g , é a função definida por $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$;

Observação 2.4.1. Em cada uma das operações definida anteriormente, o domínio da função resultante consiste naqueles valores de x que estão no domínio de cada uma das funções f e g , sendo que no quociente de duas funções ainda existe a necessidade do denominador ser não nulo.

Exemplo 2.4.1. Dadas as funções $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = \sqrt{x-4}$, encontre $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ e $(f/g)(x)$, com os seus respectivos conjuntos domínio.

SOLUÇÃO:

Tem-se que $D_f = [-1, +\infty[$ e que $D_g = [4, +\infty[$. Assim,

1 - $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$, e $D_{f+g} = [4, +\infty[$, que são os valores de x que satisfazem as duas funções ao mesmo tempo.

2 - $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}$, e $D_{f-g} = [4, +\infty[$, que são os valores de x que satisfazem as duas funções ao mesmo tempo.

3 - $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4}$, e $D_{f \cdot g} = [4, +\infty[$, que são os valores de x que satisfazem as duas funções ao mesmo tempo.

4 - $(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \sqrt{x+1}/\sqrt{x-4}$, tem-se que $D_{f/g} =]4, +\infty[$, pois o denominador tem que ser diferente de zero e, $x > 4$ são os valores de x que satisfazem as duas funções ao mesmo tempo.

Definição 2.4.2. Uma função f , de A em B é dita ser **par** se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$, e ela é dita ser **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$. Em ambos os casos tem-se que $-x$ tem que pertencer ao domínio da função f .

Exemplo 2.4.2. A função $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$ é uma função par. De fato:

$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 7 = 3x^4(-1)^4 - 2x^2(-1)^2 + 7 = 3x^4 - 2x^2 + 7 = f(x)$.
Portanto, f é uma função par.

Exemplo 2.4.3. A função $g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$ é uma função ímpar. De fato:

$g(-x) = 3(-x)^5 - 4(-x)^3 - 9(-x) = 3x^5(-1)^5 - 4x^3(-1)^3 - 9x(-1) = -3x^5 + 4x^3 + 9x = -(3x^5 - 4x^3 - 9x) = -g(x)$. Portanto g é uma função ímpar.

Observação 2.4.2. Existem funções que nem são par e nem são ímpar, como por exemplo a função $h(x) = x^2 - x$, visto que $f(2) = 2$ e $f(-2) = 6$. Neste caso, diz-se que f é **nem par e nem ímpar**.

Observação 2.4.3. O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, visto que $(-x, f(-x) = f(x))$ e $(x, f(x))$ estão em f . Já o gráfico da função ímpar é simétrico em relação a origem, pois tanto $(-x, f(-x) = -f(x))$ quanto $(x, f(x))$ estão em f .

Definição 2.4.3. Uma função f cuja imagem consiste de um único número é chamada de **função constante**, sendo a mesma dada por $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Definição 2.4.4. Uma função f , definida num intervalo I é dita ser **crescente** neste intervalo se, e somente se, $f(x_1) < f(x_2)$, sempre que $x_1 < x_2$, para todo $x_1, x_2 \in I$. f é dita ser **não-decrescente** se, e somente se, $f(x_1) \leq f(x_2)$, sempre que $x_1 < x_2$, para todo $x_1, x_2 \in I$.

Definição 2.4.5. Uma função f , definida num intervalo I é dita ser **decrescente** neste intervalo se, e somente se, $f(x_1) > f(x_2)$, sempre que $x_1 < x_2$, para todo $x_1, x_2 \in I$. f é dita ser **não-crescente** se, e somente se, $f(x_1) \geq f(x_2)$, sempre que $x_1 < x_2$, para todo $x_1, x_2 \in I$.

Exemplo 2.4.4. Seja f uma função cuja a representação gráfica é dada pela Figura 2.1, onde $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, $D = (x_4, y_4)$, $E = (x_5, y_5)$, $F = (x_6, y_6)$. Encontre os intervalos onde a função é crescente e decrescente.

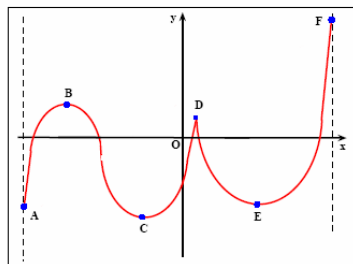


Figura 2.1: Função do Exemplo 2.4.4.

SOLUÇÃO:

Quando sai de x_1 para x_2 , tem-se que o valor de $f(x_1)$ é menor do que o valor de $f(x_2)$, pois $f(x_1)$ está embaixo de $f(x_2)$ na reta numérica. Portanto, f é crescente no intervalo $[x_1, x_2]$.

Por outro lado, quando sai de x_2 para x_3 , tem-se que o valor de $f(x_2)$ é maior do que o valor de $f(x_3)$, pois $f(x_3)$ está embaixo de $f(x_2)$ na reta numérica. Portanto, f é decrescente no intervalo $[x_2, x_3]$.

Analisando de C a D , quando sai de x_3 para x_4 , tem-se que o valor de $f(x_3)$ é menor do que o valor de $f(x_4)$. Portanto, f é crescente no intervalo $[x_3, x_4]$.

Agora, de D a E , quando sai de x_4 para x_5 , tem-se que o valor de $f(x_4)$ é maior do que o valor de $f(x_5)$. Portanto, f é decrescente no intervalo $[x_4, x_5]$.

Por fim, quando sai de x_5 para x_6 , tem-se que o valor de $f(x_5)$ é menor do que o valor de $f(x_6)$. Portanto, f é crescente no intervalo $[x_5, x_6]$.

Definição 2.4.6. Dada duas funções f e g , a **função composta** de f com g , denotada por $f \circ g$ é definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad (2.3)$$

e o domínio da $f \circ g$ é o conjunto de todos os pontos $x \in D_g$ tal que $g(x) \in D_f$.

Exemplo 2.4.5. Sejam f e g funções definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 2x - 3$. Encontre $f \circ g$ e $g \circ f$ com os seus respectivos conjuntos domínios.

SOLUÇÃO:

Tem-se que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, então, $(f \circ g)(x) = \sqrt{2x - 3}$. Para encontrar o domínio de $f \circ g$, observe que D_f é dado para todo $x \geq 0$ então, $D_{f \circ g}$ é dado por todos os elementos do domínio da g que tornam a função não-negativa, isto é, $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{3}{2}\}$.

Para o caso $g \circ f$, tem-se que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, logo $(g \circ f)(x) = 2\sqrt{x} - 3$, sendo que esta função existe para todos os números reais $x \geq 0$ então, $D_{g \circ f}$ é dado por: $D_{g \circ f} = \mathbb{R}_+$.

Exemplo 2.4.6. Dado $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 1$, encontre a) $f \circ f$; b) $f \circ g$; c) $g \circ f$; d) $g \circ g$, com os seus respectivos conjuntos domínios.

SOLUÇÃO:

Tem-se que $D_f = \mathbb{R}_+$ e $D_g = \mathbb{R}$. Assim,

a) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ e, $D_{f \circ f} = \mathbb{R}_+$.

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$ e, $D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

c) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x}^2 - 1 = |x| - 1 = x - 1$ e, $D_{g \circ f} = \mathbb{R}_+$.

g) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$ e, $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$.

2.5 Exercícios

Exercício 2.5.1. Determine o maior conjunto possível, dentro do conjunto $\mathbb{R}$, de formar que cada equação abaixo seja uma função.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$;

2. $f(x) = \sqrt{x - 4}$;

3. $f(x) = x^2$;

4. $y = x^3$;

5. $f(x) = \frac{1}{x-2}$;

6. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - x - 2}$;

7. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2}}$;

Exercício 2.5.2. Em cada uma das alternativas abaixo, são dadas duas funções, f e g . Então, para cada caso, encontre as funções $f+g$, $f-g$, fg , f/g e g/f , com os seus respectivos conjuntos domínios.

1. $f(x) = x - 5$ e $g(x) = x^2 - 1$;

2. $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 1$;

3. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$;

4. $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 4 - x^2$;

5. $f(x) = \sqrt{x+4}$ e $g(x) = x^2 - 4$.

6. $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = x^2 + 4$;

7. $f(x) = x^2 - 9$ e $g(x) = \sqrt{x+5}$;

Exercício 2.5.3. Em cada uma das alternativas abaixo, são dadas duas funções, f e g . Então, para cada caso, encontre as seguintes funções compostas $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ e determine o domínio da cada nova função.

1. $f(x) = x - 2$ e $g(x) = x + 7$;

2. $f(x) = \sqrt{x-2}$ e $g(x) = 6 - 3x$;

3. $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \frac{1}{x}$;

4. $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = -\frac{1}{x}$;

5. $f(x) = \sqrt{x-2}$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$;

6. $f(x) = \frac{1}{x-3}$ e $g(x) = \frac{x}{x+1}$.

Exercício 2.5.4. Em cada uma das alternativas abaixo é dada uma função f . Então, para cada caso, encontre as seguintes funções $f(x^2)$, $[f(x)]^2$ e $(f \circ f)(x)$, e determine o domínio da cada uma destas funções.

1. $f(x) = 2x - 3$;

2. $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Exercício 2.5.5. *Determine se cada uma das funções abaixo são par, ímpar ou nem par e nem ímpar.*

1. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$;

2. $f(x) = 5x^3 - 7x$;

3. $f(s) = sx^2 + 2s + 2$;

4. $g(x) = x^6 - 1$;

5. $h(t) = 5t^7 + 1$;

6. $f(x) = |x|$;

7. $f(x) = (x-1)^2$;

8. $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

9. $f(x) = 2x^3 - 3x$;

10. $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 1$;

11. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$.

Exercício 2.5.7. *Determine os intervalos onde cada uma das funções abaixo é crescente, decrescente e constante, em todo o seu domínio:*

1. $f(x) = x - 5$;

2. $f(x) = 3 + 5x$;

3. $f(x) = x^2 - 3x - 4$;

4. $f(x) = -x^2 - 5x + 6$;