Bem-vindo(a) à nossa aplicação de preparação para exames! Chegou a hora de se destacar nos seus testes e conquistar o sucesso acadêmico que você merece. Apresentamos o "Guião de Exames Resolvidos": a sua ferramenta definitiva para uma preparação eficaz e resultados brilhantes!

Aqui, encontrará uma vasta coleção de exames anteriores cuidadosamente selecionados e resolvidos por especialistas em cada área. Nossa aplicação é perfeita para estudantes de todos os níveis acadêmicos, desde o ensino médio até a graduação universitária.

Resumo da Matriz de Matematica 12ª classe de 2024

Índice

I. Módulo de um Número Real

1. Módulo de um Número Real

O **módulo** de um número real x, representado por |x|, é definido como a distância de x até a origem (zero) na reta numérica. Formalmente:

10.

Qual é a distância entre as abcissas $-\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{4}$?

A. $-\frac{19}{20}$ B. $-\frac{11}{20}$ C. $\frac{11}{20}$ D. $\frac{19}{20}$

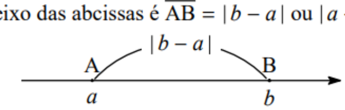
2010.1ªÉpoca

【Resolução】

$$\left|\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{5}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right|=\left|\frac{15}{20}+\frac{4}{20}\right|$$
$$=\left|\frac{19}{20}\right|=\frac{19}{20}$$

Opção: D

⟵ A distância entre os pontos A(a) e B(b) situados no eixo das abcissas é $\overline{AB}=|b-a|$ ou $|a-b|$



$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O módulo sempre resulta em um número não negativo, sendo útil para medir distâncias independentemente da direção.

2. Interpretação Geométrica do Módulo da Diferença de Dois Números Reais

O **módulo da diferença** entre dois números reais a e b, representado por |a−b|, é a distância entre esses dois números na reta numérica. Geometricamente, essa diferença expressa a distância entre os pontos a e b, independentemente de qual é maior:

$$|a-b| = |b-a|$$

3. Equações inequações Modulares

As **equações modulares** são equações que envolvem o módulo de uma variável. Para resolver uma equação modular do tipo |f(x)|=k, onde k≥0 , desdobramos em dois casos:

$f(x) = k \quad \text{ou} \quad f(x) = -k$

10.
Qual é a soma das raízes da equação $|3 + x| = 2$?

A. -6 B. -5 C. -4 D. -1

2012. 1ª época

【Resolução】

Primeiro, calcula-se as raízes da equação:

$|3 + x| = 2 \Leftrightarrow 3 + x = \pm 2 \Leftrightarrow x = -3 \pm 2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -5$

Segundo, calcula-se a soma das raízes: $(-1) + (-5) = -6$

Opção: A

$\longleftarrow$ **Equação modular do tipo $|x| = a$, onde $a \geq 0$:**
$\star |x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$

3.1.Inequações

9.
Considere a inequação $-|x| \leq 0$. Qual é a solução?

A. $\{\ \}$ B. $]-\infty; 0[$ C. $]0; +\infty[$ D. $\mathbb{R}$

2012. 1ª época

【Resolução】

Multiplicando por -1 ambos os membros da inequação, tem-se: $|x| \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ é sempre verdadeira.

Opção: D

$\longleftarrow$ Quando se multiplica ambos os membros da inequação por um número negativo, o sinal da desigualdade muda de sentido.

$\longleftarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$

Essas equações podem ter duas soluções, uma solução ou nenhuma, dependendo dos valores envolvidos.

4. Propriedades do Módulo

- $|a| \geq 0$, com $|a| = 0$ se e somente se $a = 0$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).
- $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$ (desigualdade triangular inversa).

Exemplos

11.

Qual é a condição para que $|3x-6|+x+11$ seja igual a $17-2x$?

A. $x \geq -11$ B. $x < 11$ C. $x < 2$ D. $x > 2$

2012. Extraordinário

【Resolução】

Resolve-se a equação $|3x-6|+x+11 = 17-2x$:

$$|3x-6|+x+11 = 17-2x \Leftrightarrow |3x-6| = -3x+6$$
$$\Leftrightarrow |3x-6| = -(3x-6)$$

Para que $|3x-6| = -(3x-6)$ é necessário que o número que está no dentro do módulo seja negativo, isto é:

$$3x-6<0 \Leftrightarrow x<2$$

Opção: C

⟵ Se $x \geq 0$, então $|x| = x$.
Se $x < 0$, então $|x| - x$.

II. Cálculo Combinatório e Probabilidades

5. Cálculo Combinatório e Probabilidades

O **cálculo combinatório** é uma área da matemática que estuda métodos para contar e organizar elementos. Já a **probabilidade** é a área que estuda a possibilidade de um evento ocorrer.

6. Cálculo com Fatorial

O **fatorial** de um número inteiro nnn, representado por n!, é o produto de todos os números inteiros de 1 até n:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$$

O fatorial é amplamente utilizado no cálculo combinatório, em particular nas fórmulas de permutações, combinações e arranjos.

12.

Qual é a expressão equivalente a $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$?

A. $n+1$ B. $n-1$ C. $n(n-1)$ D. $n(n+1)$

2012. Extraordinário

【Resolução】

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = (n+1)n$$

Opção: D

$$\longleftarrow (n+1)! = (n+1)n\overbrace{(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}^{(n-1)!}$$
$$= (n+1)n(n-1)!$$

7. Permutações, Combinações e Arranjos

- **Permutações**: O número de maneiras de organizar nnn elementos distintos. Para nnn elementos, o número de permutações é dado por n!.
- **Combinações**: É a seleção de r elementos de um conjunto de nnn elementos sem considerar a ordem. A fórmula é:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

13.

Existem 7 cadeiras diferentes e pretende-se escolher 4. De quantas formas isso pode acontecer?

A. 35 B. 70 C. 270 D. 840

2012. Extraordinário

【Resolução】

Deseja-se o número total das maneiras diferentes possíveis de escolher 4 elementos dentre 7 elementos. Como não interessa ordem, trata-se de uma combinação de 7 elementos tomados 4 a 4, isto é:

$$C_7^4 = C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot} = 35$$

Opção: A

⟵ $\mathbf{C}_n^p$ é o número total das maneiras diferentes possíveis de **escolher** p elementos dentre n elementos. Quando não interessa ordem, trata-se de uma combinação.

$$\longleftarrow \quad C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)}^{p \text{ factores}}}{p(p-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

- **Arranjos**: São seleções de rrr elementos de um conjunto de nnn elementos onde a ordem importa. A fórmula é:

$$A(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

14.

De quantas maneiras diferentes se podem sentar 3 raparigas e quatro rapazes, num banco de sete lugares sabendo que em cada um dos extremos fica uma rapariga?

A. 20 B. 240 C. 720 D. 5040

2012. Extraordinário

【Resolução】

O número total das maneiras diferentes de em cada um dos extremos ficar uma rapariga é A_3^2 porque se escolhem 2 raparigas dentre 3 e se permutam as 2 raparigas entre si.

O número total das maneiras diferentes de permutar as restantes $7-2=5$ pessoas para prencherem os 5 lugares excepto os extremos é $P_5 = 5!$.

Portanto a solução é: $A_3^2 \cdot 5! = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Opção: C

⟵ A_n^p é o número total das maneiras possíveis de escolher p elementos dentre n elementos e permutar os p elementos entre si. Quando interessa a ordem, trata-se de um arranjo.

$$A_n^p = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}_{p\text{factores}}$$

⟵ $P_n = n!$ é o número total das maneiras diferentes possíveis de permutar os n elementos numa fila.

8. Binómio de Newton e Aplicações

O **teorema binomial**, ou **Binómio de Newton**, permite expandir a potência de um binômio $(a+b)^n$ em uma soma de termos do tipo:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Ele é usado em diversas áreas da matemática, como álgebra, análise combinatória e cálculo de probabilidades.

9. Acontecimentos: Certo, Impossível, Contrário e Incompatível (Disjuntos)

- **Acontecimento certo:** Um evento que sempre ocorre. Sua probabilidade é $P(A) = 1$.
- **Acontecimento impossível:** Um evento que nunca ocorre. Sua probabilidade é $P(A) = 0$.
- **Acontecimento contrário:** O evento contrário ao acontecimento A, representado por $\overline{A}$, ocorre quando A não ocorre. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- **Acontecimentos incompatíveis (disjuntos):** Dois eventos que não podem ocorrer simultaneamente. Se A e B são incompatíveis, então $P(A \cap B) = 0$.

10. Operações com Acontecimentos (União e Interseção)

- **União de acontecimentos:** A união de dois acontecimentos A e B, representada por $A \cup B$, corresponde ao acontecimento em que ocorre A, B ou ambos. Sua probabilidade é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- **Interseção de acontecimentos:** A interseção de A e B, representada por $A \cap B$, é o acontecimento onde ambos ocorrem simultaneamente.

11. Determinação da Probabilidade pela Lei de Laplace

A **Lei de Laplace** estabelece que, para um experimento aleatório com n resultados igualmente prováveis, a probabilidade de um evento A ocorrer é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A}{\text{número total de casos possíveis}}$$

Essa fórmula é fundamental para o cálculo de probabilidades em experimentos onde todos os resultados são equiprováveis.

15.
Num saco estão 4 bolas de igual tamanho numeradas de 1 a 4. Tirando-se sucessivamente sem reposição, as quatro bolas do saco, qual é a probabilidade de as bolas saírem por ordem crescente?

A. $\frac{1}{24}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

2012. Extraordinário

【Resolução】

O número de casos possíveis é $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. $\longleftarrow C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1$

O número de casos favoráveis é 1. $\longleftarrow$ Apenas um caso em ordem seguinte: ①②③④

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{1}{24}$. $\longleftarrow$ Probabilidade= $\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$

Opção: A

III. Função Real de Variável Natural

12. Função Real de Variável Natural

Uma **função real de variável natural** é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais {N} e o contradomínio é o conjunto dos números reais (R). Assim, uma função f pode ser expressa como:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad f(n) = y$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{R}$. Um exemplo comum de função desse tipo é uma **sucessão**, que associa a cada número natural n um valor real.

21.

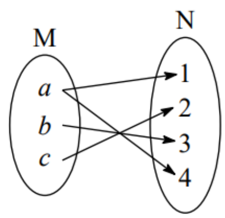
Dados os conjuntos $M = \{a; b; c\}$ e $N = \{1; 2; 3; 4\}$ considere a relação $R : M \to N$ representada na figura. Qual das opções representa a relação R?

A. $R = \{(a; 1), (b; 3), (c; 4), (a; 3)\}$

B. $R = \{(1; a), (4; a), (3; b), (c; 2)\}$

C. $R = \{(a; 1), (b; 3), (c; 2)\}$

D. $R = \{(a; 1), (a; 4), (b; 3), (c; 2)\}$



2012. Extraordinário

22.

Qual é o contradomínio da relação $R = \{(1; 1), (2; 3), (3; 5), (5; 1), (7; 7)\}$?

A. $CD = \{1; 2; 3; 5; 7\}$ B. $CD = \{1; 2; 5; 7\}$ C. $CD = \{1; 3; 5; 7\}$ D. $CD = \{3; 5; 7\}$

2012. Extraordinário

【Resolução】

Como $R = \{(1; \underline{1}), (2; \underline{3}), (3; \underline{5}), (5; \underline{1}), (7; \underline{7})\}$, ⟵ (objecto; imagem)

as imagens da relação R são 1, 3, 5 e 7.

Logo, $CD = \{1; 3; 5; 7\}$ ⟵ Ao conjunto das imagens chama-se contradomínio e representa-se por CD.

Opção: C

13. Termo Geral de uma Sucessão

O **termo geral** de uma sucessão é a fórmula que descreve a posição n-ésima de uma sucessão, permitindo calcular qualquer termo da sequência a partir de sua posição. Denotando uma sucessão por a_n, o termo geral é uma expressão matemática que depende da posição n. Por exemplo:

- Na **Progressão Aritmética (PA)**, o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

onde a_1 é o primeiro termo e r é a razão.

- Na **Progressão Geométrica (PG)**, o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

18.

Qual das sucessões NÃO forma nenhuma progressão?

A. 3; 12; 48; 192; . . .
B. 1; 3; 5; 7; . . .
C. 1; −3; 5; −7; . . .
D. 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; . . .

2012. Extraordinário

【Resolução】

A sucessão da opção A é uma PG em que $a_1 = 3$ e $q = 4$.
A sucessão da opção B é uma PA em que $a_1 = 1$ e $d = 2$.
A sucessão da opção C não é PA nem PG.
A sucessão da opção D é uma PG em que $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.

Opção: C

Definição de PA e PG:

- ★ Se a diferença entre dois termos consecutivos de uma sucessão a_n é constante, então a_n é uma PA.
- ★ Se o quociente entre dois termos consecutivos de uma sucessão a_n é constante, então a_n é uma PG.

3. Monotonia de uma Sucessão

A **monotonia de uma sucessão** se refere à forma como os termos da sucessão variam. Uma sucessão pode ser classificada como:

- **Crescente**: Se $a_{n+1} \geq a_n$ para todo n, ou seja, os termos aumentam conforme a posição n aumenta.
- **Decrescente**: Se $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n.
- **Monótona**: Quando a sucessão é sempre crescente ou sempre decrescente.

17.

Qual é a característica correcta que corresponde a sucessão $a_n = 5 + 2^{-3n}$?

A. Constante B. Decrescente C. Crescente D. Oscilante

2012. 1ª época

【Resolução】

$$a_{n+1} - a_n = 5 + 2^{-3(n+1)} - (5 + 2^{-3n}) = 2^{-3n-3} - 2^{-3n}$$
$$= 2^{-3n} \cdot 2^{-3} - 2^{-3n} = 2^{-3n} \cdot \frac{1}{8} - 2^{-3n}$$
$$= 2^{-3n}\left(\frac{1}{8} - 1\right) = 2^{-3n} \cdot \left(\frac{1-8}{8}\right)$$
$$= 2^{-3n} \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) < 0$$

Conclui-se que $a_{n+1} - a_n < 0$. Portanto, a_n é decrescente.

Opção: B

⟵ Substituindo n por $n + 1$ em $a_n = 5 + 2^{-3n}$, obtém-se $a_{n+1} = 5 + 2^{-3(n+1)}$.

⟵ $2^{-3n-3} = 2^{-3n} \cdot 2^{-3}$; $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

⟵ Coloca-se em evidência o factor comum 2^{-3n}, como $A \cdot B - A = A(B - 1)$

⟵ Como $2^{-3n} > 0$ e $-\frac{7}{8} < 0$, então $2^{-3n} \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) < 0$.

⟵ Uma sucessão a_n é crescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n > 0$
Uma sucessão a_n é decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n < 0$

4. Limite de uma Sucessão

O **limite de uma sucessão** descreve o comportamento dos termos à medida que n tende ao infinito. Se a_n se aproxima de um valor L conforme $n \to \infty$, dizemos que o limite da sucessão é L, expresso como:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

Se a sucessão não converge para um número específico, diz-se que ela diverge.

Exemplo

16.

Qual das sucessões é divergente?

A. $\frac{n-1}{n+1}$ B. $\frac{n+1}{n}$ C. $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ D. $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

2012. Extraordinário

【Resolução】

Calcula-se o limite de cada sucessão das opções dadas:

A. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$

B. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$

⟵ Se o numerador e o denominador têm o mesmo grau, então o limite quando $x \to \infty$ é igual ao quociente dos coeficientes dos termos de maior grau, isto é: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_1x^n + b_1x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \cdots}{a_2x^n + b_2x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots} = \frac{a_1}{a_2}$

C. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$

⟵ Se $a > 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$

D. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

⟵ Se $|a| < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

Como o limite da sucessão da opção C não é um número real, então esta sucessão é divergente.

⟵ Uma sucessão a_n é convergente se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$. Uma sucessão que não é convergente é divergente.

Opção: C

5. Aplicação da Progressão Aritmética e Progressão Geométrica na Resolução de Problemas Práticos

- **Progressão Aritmética (PA)**: Utilizada para modelar situações de crescimento ou decréscimo linear, como o cálculo de prestações, salários anuais, ou amortizações de dívida. A fórmula do termo geral da PA é:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

- **Progressão Geométrica (PG)**: Modela situações de crescimento exponencial, como juros compostos, crescimento populacional ou depreciação exponencial. O termo geral da PG é:

  $$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

  Exemplo

17.

Considere a sucessão $\left(1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \cdots\right)$. Qual é o seu termo geral?

A. $U_n = \frac{n}{3^n}$ B. $U_n = \frac{1}{3^n}$ C. $U_n = \frac{1}{n^3}$ D. $U_n = \frac{1}{3^{n-1}}$

2012. Extraordinário

【Resolução】

Como o quociente entre dois termos conscutivos é constante $\frac{1}{3}$, esta sucessão é uma PG em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$.

$\longleftarrow$ $1, \underbrace{\;}_{\times\frac{1}{3}} \frac{1}{3}, \underbrace{\;}_{\times\frac{1}{3}} \frac{1}{9}, \underbrace{\;}_{\times\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \cdots$

Logo, o termo geral desta sucessão é: $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}$

$\longleftarrow$ O termo geral de uma PG é dado por $a_n = a_1 q^{n-1}$

Opção: D

6. Soma de n Termos Consecutivos de uma Progressão Aritmética e Progressão Geométrica

- **Soma dos primeiros nnn termos de uma PA**: A fórmula para somar os primeiros nnn termos de uma PA é:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

- **Soma dos primeiros nnn termos de uma PG**: A fórmula para a soma dos primeiros nnn termos de uma PG é:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}, \quad \text{se } r \neq 1$$

20.

Qual é a solução da equação $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \cdots = 40$?

A. 10 B. 20 C. 30 D. 40

2012. Extraordinário

【Resolução】

A equação dada fica: $x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = 40$

$\longleftarrow$ Coloca-se o factor comum x em evidência.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ é a soma duma PG infinita em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$. Como $|q| = \frac{1}{2} < 1$, então tem-se:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$\longleftarrow$ A soma de uma PG infinita em que $|q| < 1$ é dada por: $S = \frac{a_1}{1-q}$

Logo, a equação dada fica:

$$x \cdot 2 = 40 \Leftrightarrow 2x = 40 \Leftrightarrow x = 20$$

Opção: B

IV. Limite e Continuidade de Funções

7. Limite e Continuidade de Funções

A **continuidade** e o **limite** de funções são conceitos centrais em análise matemática. A continuidade implica que pequenas variações na entrada resultam em pequenas variações na saída, enquanto o limite descreve o comportamento da função à medida que a variável independente se aproxima de um valor específico.

8. Limites Laterais

Os **limites laterais** são os limites de uma função à medida que a variável independente se aproxima de um ponto por valores à esquerda ou à direita. O limite lateral à esquerda é expresso como:

$$\lim_{x \to c^-} f(x)$$

e o limite lateral à direita como:

$$\lim_{x \to c^+} f(x)$$

28.

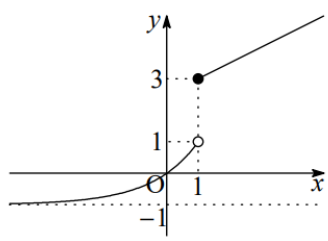
Na figura está representado o gráfico da função f. Qual é a alternativa correcta?

A. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

B. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$

C. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$

D. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$



2012. Extraordinário

【**Resolução**】

Nota-se que quando x se aproxima de 1 pela direita, $f(x)$ se aproxima de 3 e quando x se aproxima de 1 pela esquerda, $f(x)$ se aproxima de 1.

Então tem-se: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$

Logo, a alternativa correcta é C.

Opção: C

⟵ Quando x se aproxima de a **pela esquerda**, $f(x)$ aproxima-se de α, simbolicamente, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \alpha$.

Quando x se aproxima de a **pela direita**, $f(x)$ aproxima-se de α, simbolicamente, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \alpha$.

9. Cálculo do Limite de uma Função (Formas Indeterminadas)

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

se $f(x)$ pode ser feito arbitrariamente próximo de L, sempre que x estiver suficientemente próximo de c.

Alguns limites levam a **formas indeterminadas** como $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, etc. Para calcular esses limites, utilizamos técnicas como a fatoração, racionalização ou a aplicação da regra de L'Hôpital.

- **Fatoração:** Fatorar o numerador e o denominador para simplificar a fração.
- **Racionalização:** Usar a multiplicação por um conjugado para eliminar raízes.

24.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x}{-3x^4 + 2x^3 - x^2}$?

A. $-\frac{5}{3}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. 0 D. $+\infty$

2012. 2ª época

【Resolução】

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 2x}{-3x^4 + 2x^3 - x^2} = \left[-\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5x^2-2x}{x^4}}{\frac{-3x^4+2x^3-x^2}{x^4}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^3}}{-3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{0 - 0}{-3 + 0 - 0} = 0$$

Opção: C

⟵ Para levantar a indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $-\frac{\infty}{\infty}$, divide-se o numerador e o denominador pela potência máxima.
Neste caso, como o denominador é do 4° grau, divide-se o numerador e o denominador por x^4.

23.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$?

A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

2012. 2ª época

【Resolução】

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2) - 4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

Opção: B

⟵ Multiplica-se pelo conjugado $\sqrt{x+2}+2$ de $\sqrt{x+2}-2$.

⟵ $(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2) = \left(\sqrt{x+2}\right)^2 - 2^2 = (x+2)-4$

⟵ Substitui-se x por 2.

26.

Qual é a afirmação correcta?

A. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+3}=0$ B. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\infty$ C. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=3$ D. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+3}=-6$

2012. Extraordinário

【Resolução】

Calcula-se $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+3}$ e $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}$:

★ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{3^2-9}{3+3}=\frac{0}{6}=0$

★ $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}$

$=\lim\limits_{x\to -3}(x-3)=-3-3=-6$

Portanto, a opção correta é A.

⟵ Como não é nenhuma indeterminação, basta substituir x por 3.

⟵ Factoriza-se x^2-9 aplicando $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ e simplifica-se $x+3$ para levantar a indeterminação $\frac{0}{0}$.

27.

Qual é o valor do $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2012. Extraordinário

【Resolução】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x(1+\cos x)}{\mathbf{1-\cos^2 x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x(1+\cos x)}{\mathbf{sen^2 x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$
$$=1+1=2$$

Opção: B

⟵ Multiplica-se pelo conjugado $1+\cos x$ de $1-\cos x$ o numerador e o denominador.

⟵ $(1-\cos x)(1+\cos x)=1-\cos^2 x$ por $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

⟵ Como $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, então $\operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x$.

⟵ Simplifica-se $\operatorname{sen}^2 x$.

⟵ Substitui-se x por 0. $\cos 0=1$

40.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x$?

A. e^5 B. e^3 C. e^{-5} D. e^{-3}

2012. Extraordinário

【Resolução】

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\tfrac{5}{x}\right)^x=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}-1\right)\cdot x}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(-5)}=e^{-5}$$

Opção: C

Sejam $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Então tem-se:

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}$

【Outra resolução】

Como $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\boldsymbol{k}}{x}\right)^x=e^k$, então $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x=e^{-5}$

24.

Qual é o valor do $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$?

A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

2012. 1ª época

【Resolução】

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

⟵ Multiplica-se pelo conjugado $1+\cos x$ de $1-\cos x$ o numerador e o denominador.

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{1-\cos^2 x}}{x^2(1+\cos x)}$$

⟵ $(1-\cos x)(1+\cos x) = 1-\cos^2 x$ porque $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$.

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{sen^2 x}}{x^2(1+\cos x)}$$

⟵ Como $\text{sen}^2 x+\cos^2 x = 1$, então $1-\cos^2 x = \text{sen}^2 x$.

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$

$$= 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

⟵ **Limite notável**: $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x} = 1$; $\cos 0 = 1$

Opção: C

10. Continuidade de Funções

Uma função $f(x)$ é **contínua** em um ponto $x = c$ se:

1. $f(c)$ está definida.
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

29.

Para que a função $f(x) = \begin{cases} k & , \text{ se } x = 0 \\ \dfrac{\text{sen}x}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \end{cases}$ seja contínua em $\mathbb{R}$, qual deve ser o valor de k?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

Para que $f(x)$ seja contínua em $\mathbb{R}$, é necessário que $f(x)$ seja contínua no ponto $x = 0$.

Existe o limite de $f(x)$ no ponto $x = 0$ e seu valor é:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = \mathbf{1}$$

O valor de $f(x)$ no ponto $x = 0$ é: $f(0) = \boldsymbol{k}$

Para que $f(x)$ seja contínua no ponto $x = 0$, é necessário que $k = 1$.

Opção: B

⟵ A partir da definição de $f(x)$, o gráfico de $f(x)$ muda-se no ponto $x = 0$.

⟵ Para $x \neq 0$, os limites laterais são iguais.

⟵ **Limite notável**: $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$

⟵ f é contínua em $x = a$
$\Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

27.

Considere a função $f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{se } x < 3 \\ k + 3 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$. Qual deve ser o valor de k para que a função seja contínua no ponto de abcissa $x = 3$?

A. 1 B. 3 C. 10 D. 13

2012. 1ª época

【**Resolução**】

Para que a função seja contínua em $x = 3$, é necessário que:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$$

O limite lateral à esquerda de $x = 3$ é:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (4x + 1) = 4 \cdot 3 + 1 = \mathbf{13}$$

O limite lateral à direita de $x = 3$ é:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (k + 3) = \boldsymbol{k + 3}$$

O valor da função no ponto $x = 3$ é: $f(0) = \boldsymbol{k + 3}$

Como estes são iguais, tem-se:

$$\boldsymbol{k + 3 = 13} \Leftrightarrow k = 10$$

⟵ $f(x)$ é contínua no ponto de abcissa $x = a$
$\Longleftrightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
$\Longleftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

⟵ Quando $x \to 3^-$, isto é, $x < 3$, $f(x) = 4x + 1$.

⟵ Quando $x \to 3^+$, isto é, $x > 3$, $f(x) = k + 3$.

⟵ $f(x) = k + 3$, se $x = 3$

V. Cálculo Diferencial

11. Cálculo Diferencial

O **cálculo diferencial** estuda como as funções mudam e é usado para calcular derivadas, que representam a taxa de variação de uma função.

13. Interpretação Geométrica da Derivada de uma Função num Ponto

A **derivada de uma função** $f(x)$ em um ponto $x = a$ representa a inclinação da reta tangente à curva $f(x)$ nesse ponto. Geometricamente, a derivada fornece a taxa de variação instantânea da função naquele ponto.

12. Derivabilidade e Continuidade de uma Função

Uma função é **derivável** em um ponto se sua derivada existe nesse ponto. Se uma função é derivável em um ponto, ela também é contínua nesse ponto, mas o inverso não é sempre verdadeiro.

13. Regras de Derivação para o Cálculo de Derivadas da Primeira e Segunda Ordem

Algumas regras básicas de derivação são:

- Derivada de uma constante: $f'(x) = 0$.
- Regra da potência: $f(x) = x^n$ implica $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
- Derivada da soma: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
- Regra do produto: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- Regra do quociente: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$.

29.

Qual é a primeira derivada da função $f(x) = e^x \cdot \cos x$?

A. $e^x \operatorname{sen} x$ B. $e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$ C. $e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$ D. $e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$

2012. 1ª época

【Resolução】

$$f'(x) = (e^x \cdot \cos x)' = (e^x)' \cdot \cos x + e^x \cdot (\cos x)'$$
$$= e^x \cos x + e^x(-\operatorname{sen} x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

$\longleftarrow [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\longleftarrow (e^x)' = e^x; \quad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

Opção: D

31.

Sendo $f(x) = \frac{1}{x^3}$, qual é o valor de $f'(1)$?

A. 3 B. 1 C. $\frac{1}{3}$ D. -3

2012. Extraordinário

【Resolução】

Calcula-se $f'(x)$:

$$f'(x) = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$ $\longleftarrow \forall x \in \mathbb{R}, (x^n)' = nx^{n-1}$

Logo, $f'(1) = -\frac{3}{1^4} = -3$ $\longleftarrow$ Substitui-se x por 1 em $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$

Opção: D

32.

Qual é a derivada da função $f(x) = 2^x \cdot x^2$?

A. $2^x x(\ln 2 + 2)$ B. $2^x x(x \ln 2 + 2)$ C. $2^x x(\ln x + 2)$ D. $2^x x(\ln x + 2x)$

2012. Extraordinário

【Resolução】

$f'(x) = (2^x \cdot x^2)' = (2^x)' x^2 + 2^x (x^2)'$ $\longleftarrow [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$= 2^x \ln 2 \cdot x^2 + 2^x \cdot 2x = \mathbf{2^x x} \cdot x \ln 2 + \mathbf{2^x x} \cdot 2$ $\longleftarrow (2^x)' = 2^x \ln 2$ aplicando $(a^x)' = a^x \ln a$

$= 2^x x(x \ln 2 + 2)$ $\longleftarrow$ Coloca-se o factor comum $2^x x$ em evidência.

Opção: B

A **derivada de segunda ordem** representa a taxa de variação da derivada da função e é utilizada para estudar concavidade e convexidade de funções.

14. Cálculo da Derivada de uma Função num Ponto

O cálculo da derivada de uma função $f(x)$ em um ponto $x = a$ é feito utilizando a definição da derivada:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Além das regras para a primeira ordem, a **derivada de segunda ordem** $f''(x)$ é a derivada da derivada $f'(x)$, e assim por diante para derivadas de ordem superior.

Exemplo de aplicação das regras:

Para $f(x) = x^3 + 2x$, temos:

- $f'(x) = 3x^2 + 2$
- $f''(x) = 6x$

Conclusão: Aplicando as regras de derivação e a definição de derivada, podemos calcular derivadas de funções, interpretar geometricamente, e verificar condições de derivabilidade e continuidade.

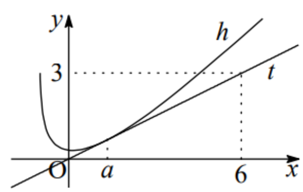
15.Ponto de tangencia

31.

Na figura seguinte está a representação gráfica da função h e de uma recta t, tangente ao gráfico no ponto de abcissa $x = a$. Qual é o valor de $h'(a)$?

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$



2010. Extraordinário

【Resolução】

Seja m o declive da recta t. Então tem-se: $h'(a) = m$

Calcula-se o valor de m.

Pela leitura do gráfico, o gráfico passa pela origem e pelo ponto $(6; 3)$.

Então, o declive da recta t é: $m = \frac{3-0}{6-0} = \frac{1}{2}$

Portanto, tem-se: $h'(a) = m = \frac{1}{2}$

Opção: D

⟵ O declive da recta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ em $x = a$ é igual a $f'(a)$.

⟵ O declive de uma recta que passa pelos pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ é $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

16.Referencias bibliográficas

1. **Anton, Howard.** *Cálculo - Um Novo Horizonte*. 7ª edição, Editora Bookman, 2007.

2. **Guidorizzi, Hamilton Luiz.** *Um Curso de Cálculo - Volume 1*. 6ª edição, Editora LTC, 2011.

3. **Stewart, James.** *Cálculo: Volume 1*. 7ª edição, Cengage Learning, 2013.

4. **Thomas, George B., Jr.** *Cálculo Volume 1*. 12ª edição, Pearson Education do Brasil, 2012.

5. **Silva, Elon Lages Lima.** *Curso de Análise*. Projeto Euclides, IMPA, 2008.

6. **Lima, Elon Lages.** *Cálculo Diferencial e Integral: Volume 1*. IMPA, 1980.

7. **Boyce, William E., DiPrima, Richard C.** *Equações Diferenciais e Problemas de Valores de Contorno*. 9ª edição, Editora LTC, 2010.