Universidade Eduardo Mondlane
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática e Informática
1^0 Teste de Matemática Discreta II

Duração: 90 minutos Curso: **Informática** - VII 13.09.2023

Apelido Correcção Nomes Oficial

1. Considere a função f definida sobre as sucessões binárias de maneira seguinte:
   (b) $f(\lambda) = 1$, onde λ é o símbolo vazio.
   (r) $f(as) = f(s) + 1$; $f(sb) = 2f(s)$; $s \in S$

   (a) (*2.0 valores*) Determine o domínio de definição desta função e calcule os conjuntos S_1, S_2.

   (b) (*1.5 valores*) Verifique se a definição da função é definida correctamente ou não.

   (c) (*2.0 valores*) Calcule $f(aaabbbb)$.

a) (B) $\lambda \in D$
(R) Se $s \in D \longrightarrow as \in D$
Se $s \in D \longrightarrow sb \in D$.

$S_1 = \{a; b\}$; $S_2 = S_1 \cup \{aa, ab, bb\}$

b) $f(ab) = f(b) + 1 = 2f(\lambda) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
$f(ab) = 2f(a) = 2(f(\lambda) + 1) = 2(1+1) = 4$
Logo, f não é definido correctamente.

c) $f(aaabbbb) = f(aabbbb) + 1$
$= f(abbbb) + 1 + 1$
$= f(bbbb) + 1 + 2$
$= 2f(bbb) + 3$
$= 2 \cdot 2f(bb) + 3$
$= 4 \cdot 2f(b) + 3$
$= 8 \cdot 2f(\lambda) + 3$
$= 16 \cdot 1 + 3 = 19.$

2. Considere a definição recursiva do conjunto $S \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ dado por:
(B) $(0,0) \in S$;
(R) Se $(m,n) \in S$, então $(m+1, n+2)$, $(m+2, n+2)$, $(m+3, n+2) \in S$.

(a) (*2.0 valores*) Calcule os conjuntos S_1; S_2; S_3 e represente-os no plano cartesiano $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$.

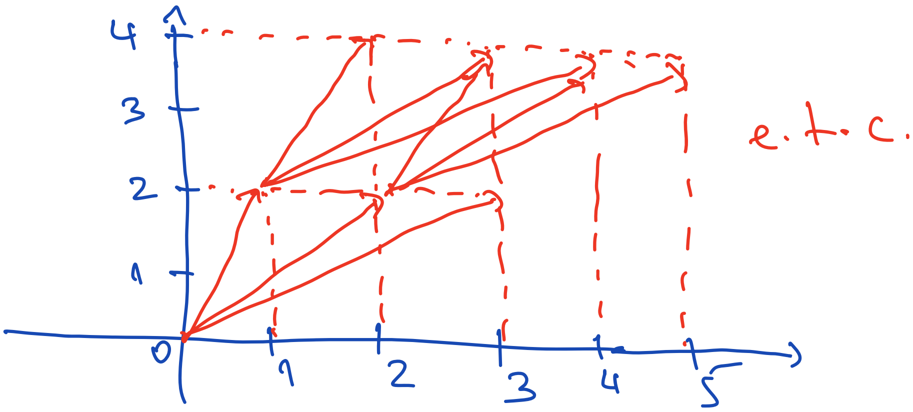
(b) (*1.5 valores*) Verifique se esta definição é determinada unicamente. Justifique a sua resposta.

(c) (*2.5 valores*) Aplicando o principio geral de Indução Matemática, verifique se $2n \geq m$, $\forall (m,n) \in S$.

a) $S_1 = S_0 \cup \{(1,2),(2,2),(3,2)\}$

$S_2 = S_1 \cup \{(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4)\}$

$S_3 = S_2 \cup \{(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(7,6),(8,6),(9,6)\}$



c) (B) Para $(0,0)$, temos: $2 \cdot 0 \geq 0$ ✓

(I) Sup. que para $(m,n) \in S$, $2m \geq n$ é verdadeiro

vamos mostrar para (m', n'), de acordo com as regras dadas:

Para $(m+1, n+2)$, temos: $2(n+2) \geq m+1 \Rightarrow 2n+4 \geq m+1$ ✓ pela hipótese

Para $(m+2, n+2)$, temos: $2(n+2) \geq m+2$

$\Rightarrow 2n+4 \geq m+2$

$\Rightarrow 2n+2 \geq m$ ✓

Para $(m+3, n+2)$: $2(n+2) \geq m+3$

$2n+4 \geq m+3 \Rightarrow 2n+1 \geq m$ ✓

De (B) e (I), temos que a proposição é verdadeira.

3. Considere a expressão $F = 91 - 2 * 63/53 - *+$

(a) (*2.5 valores*) Calcule o valor desta fórmula e escreva-a nas formas infixa e posfixa.

(b) (*1.0 valor*) Esboce a árvore binária correspondente a esta fórmula.

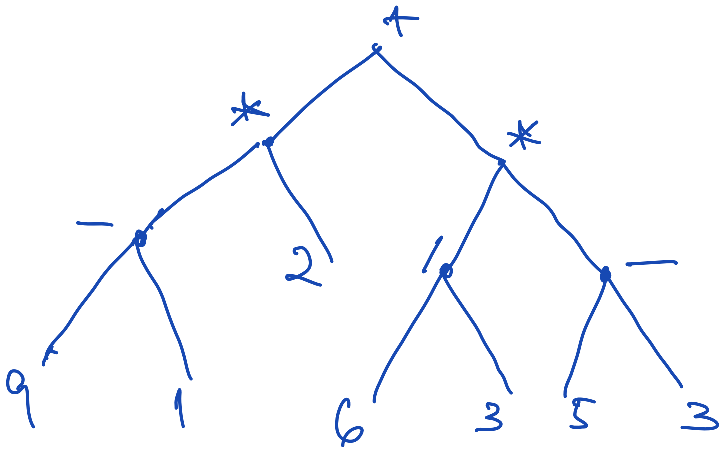
(c) (*1.0 valor*) Usando a operação ligação, escreva a expressão correspondente para a sua árvore acima.

a) $v(F) = (9-1)*2 + [(6/3)*(5-3)] = 20$

Infixa: $F = \{[(9-1)*2] + [(6/3)*(5-3)]\}$

Prefixa: $F = +*-912*/63-53$

b)

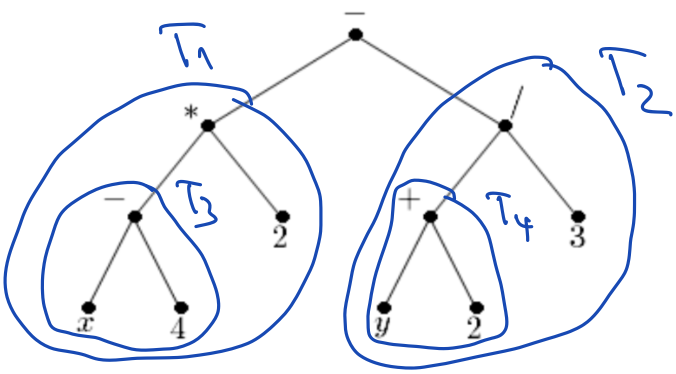


c) $T = lig(+, lig(*, lig(-, \circ 9, \circ 1), \circ 2),$
$lig(*, lig(/, \circ 6, \circ 3), lig(-, \circ 5, \circ 3)))$

4. Considere a árvore T abaixo.

   (a) (*1.0 valor*) Usando a operação ligação, escreva a expressão correspondente para esta árvore

   (b) (*3.0 valores*) Considere a definição de função $f(n, T)$, onde $n \in \mathbb{N}$ e T uma árvore binária regular.
   $f(n, \odot v) = n$, se o v for folha.
   $f(n, T) = h(T) + f(n+1,\ esq(T)) + f(n+1,\ dto(T))$, onde $h(T)$ é a altura da árvore T.
   Calcule $f(5, T)$ para a árvore dada.



a) $T = lig(-, lig(*, lig(-, \odot x, \odot 4), \odot 2),$
$lig(/, lig(+, \odot y, \odot 2), \odot 3))$

b) $f(5, T) = 3 + f(6, T_1) + f(6, T_2)$
$= 3 + 2 + f(7, T_3) + f(7, \odot 2)$
$+ 2 + f(7, T_4) + f(7, \odot 3)$
$= 7 + 1 + f(8, \odot x) + f(8, \odot 4) + 7$
$+ 1 + f(8, \odot y) + f(8, \odot 2) + 7$
$= 23 + 8 + 8 + 8 + 8$
$= 55.$

Bom trabalho!
Calisto Guambe & Alfredo Muxlhanga