Guião de correcção do exame de Matemática 12ª classe 2015–Primeira Época

1. **Quais são as operações lógicas que sempre associam duas proposições com o mesmo valor lógico numa proposição verdadeira?**

   A Conjunção e Implicação
   B Conjunção e Equivalência
   C Disjunção inclusiva e Equivalência
   D Equivalência e Implicação

   Resposta: A alternativa correcta é **D** Equivalência e Implicação.
   Explicação:

   i. A Equivalência é uma operação lógica que associa duas proposições com o mesmo valor lógico (ambas verdadeiras ou ambas falsas). Isso significa que duas proposições P e Q são equivalentes logicamente mbas são verdadeiras ou ambas falsas.
   ii. A Implicação é verdadeira em quase todos os casos, excepto quando a primeira proposição é verdadeira e a segunda é falsa.

2. **Qual é a negação de $2+5>7$?**

   A $2+5\leq 7$
   B $2+5\neq 7$
   C $2+5>7$
   D $2+5\geq 7$

   Resposta: A negação de $2+5>7$ é a alternativa **A** $2+5\leq 7$.

   Explicação: A negação de uma proposição do tipo $P>Q$ é $P\leq Q$, pois:

   i. O oposto de "maior que >" é "menor ou igual a ≤".
   ii. Assim, para $2+5>7$, a negação é $\boxed{2+5\leq 7}$

3. **Qual é o domínio de existência da expressão $\frac{3}{x^2+1}-\sqrt[3]{x+1}$?**

   A $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
   B $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$
   C $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
   D $\mathbb{R}$

   Resposta: A alternativa correta é **D** $\mathbb{R}$.
   Explicação: Para determinar o domínio de existência de uma expressão, analisamos as restrições matemáticas que podem torná-la indefinida:

   i. Primeira parte da expressão: $\frac{3}{x^2+1}$
   Essa fração será indefinida apenas se o denominador for zero. Porém:

   $$x^2+1=0 \implies x^2=-1$$

   Não existem números reais que satisfaçam $x^2=-1$. Portanto, não há restrições no conjunto dos números reais.

ii. Segunda parte da expressão: $-\sqrt[3]{x+1}$
A raiz cúbica é definida para todos os números reais, incluindo valores negativos. Assim, também não há restrições.

Portanto, a expressão $\frac{3}{x^2+1} - \sqrt[3]{x+1}$ é definida para todos os números reais, e o domínio é: $\mathbb{R}$

4. Qual é a solução da equação $2^x + 2^{x+2} = 6$?

A 0

B 1

C 2

D 3

Resposta: B 1

$$2^x + 2^{x+2} = 6.$$

Podemos reescrever 2^{x+1} como $2^x \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^x$. Substituímos na equação:

$$2^x + 2 \cdot 2^x = 6$$

Colocando o 2^x em evidencia teremos:

$$(1+2) \cdot 2^x = 6$$

$$3 \cdot 2^x = 6$$

Dividindo ambos os lados por 3:

$$2^x = \frac{6}{3}$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

$$\boxed{x = 1}$$

5. Considere $x + \frac{1}{x} = 10$. Qual é o valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$?

A 8

B 12

C 98

D 100

Resposta: C 98
Explicação: Usamos a identidade algébrica:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

Sabemos que:

$$x + \frac{1}{x} = 10$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 10^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 100$$

Subtraindo 2 de ambos os lados:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 = 100 - 2$$

$$\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = 98}$$

6. **Qual é o valor de** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$**?**

A 25

B 30

C 35

D 40

Resposta: D 40

Explição: Seja B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, usando o método de Sarrus (baseia-se na soma e subtração de produtos de diagonais principais e secundárias) para calcular a determinante teremos:

$$\det(B) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$$\det(B) = (2\cdot 3\cdot 5 + 1\cdot 2\cdot 0 + 4\cdot(-2)\cdot 0) - (4\cdot 3\cdot 0 + 1\cdot(-2)\cdot 5 + 2\cdot 0\cdot 0)$$

$$\det(B) = (30+0+0) - (0-10+0)$$

$$\det(B) = 30 + 10$$

$$\boxed{\det(B) = 40}$$

7. Qual é a solução da inequação $\frac{2x-1}{x+3} > 0$?

A $]-3, \frac{1}{2}[$

B $]-3, 4[$

C $]-\infty, -3[\cup]4, +\infty[$

D $]-\infty, -3] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$

Explicação: Para resolver a inequacação, podemos optar pelo método de tabelas. Para isso primero devemos achar os pontos críticos, esses pontos ocorrem quando o numerador ou o denominador se anulam:

- **Numerador:** $2x - 1 = 0 \implies x = \frac{1}{2}$.
- **Denominador:** $x + 3 = 0 \implies x = -3$.

Os pontos críticos são $x = -3$ e $x = \frac{1}{2}$. Os pontos críticos dividem a reta real em três intervalos:

$$]-\infty, -3[, \quad \left]-3, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

Construindo a tabela teremos:

x	$]-\infty,-3[$	-3	$]-3,\frac{1}{2}]$	$\frac{1}{2}$	$[\frac{1}{2},+\infty[$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{2x-1}{x+3}$	$+$	$\nexists$	$-$		$+$

Table 1: Tabela de sinais

Queremos os valores de x para os quais $\frac{2x-1}{x+3} \leq 0$ ou seje onde o quociente é positivo:

- O quociente é positivo no intervalo $]-\infty, -3[$ e no intervalo$[\frac{1}{2}, +\infty[$
- Em $x = -3$, o denominador se anula, tornando o quociente indefinido. Portanto, $x = -3$ **não pertence** à solução.

Assim a solução é:

$$\boxed{x \in]-\infty, -3[\cup\, [\tfrac{1}{2}, +\infty[}$$

8. Qual é o valor numérico de $\frac{-\sin 5\pi + \cos(-\frac{3\pi}{2})}{\tan\frac{5\pi}{4}}$?

A -1

B 0

C 1

D $\sqrt{2}$

Resposta: B $\boxed{0}$

$$\frac{-\sin 5\pi + \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}{\tan\frac{5\pi}{4}} = \frac{-(0)+(0)}{\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{0}{1} = 0.$$

9. **Qual é a expressão simplificada de** $\frac{2\sin x - \tan x}{2\cos x - 1}$?

A $\sin x$

B $\cos x$

C $\tan x$

D $\cot x$

Resposta: C $\tan x$
Explicação: Para a resolução usaremos a definição de tangente em relação a $\sin x$ e $\cos x$

$$\frac{2\sin x - \tan x}{2\cos x - 1}$$

$$= \frac{2\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{2\cos x - 1}.$$

$$= \frac{\frac{2\sin x\cos x - \sin x}{\cos x}}{2\cos x - 1}.$$

$$= \frac{\sin x\cancel{(2\cos x - 1)}}{\cos x\cancel{(2\cos x - 1)}}.$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}.$$

$$\boxed{= \tan x}$$

10. Qual é a condição para que a igualdade $|1-3x| - x + 8 = 9 - 4x$ seja verdadeira?

A $x \le \frac{1}{3}$

B $x \ge \frac{1}{3}$

C $x > \frac{1}{3}$

D $x < \frac{1}{3}$

Resposta: A $x \le \frac{1}{3}$
Explicação: Podemos reescrever a equação como:

$$|1-3x| = 9 - 8 - 4x + x$$

$$|1-3x| = 1 - 3x$$

Entao para que a condição seja verdadeira é necessario que:

$$1 - 3x \ge 0 \quad \textit{(Pela definição de módulo de um número)}$$

$$-3x \ge -1$$

$$3x \le 1$$

$$x \le \frac{1}{3}$$

11. Qual é a soma dos elementos do conjunto solução da equação $|5x-1| = x+3$?

A $-\frac{4}{3}$

B $-\frac{2}{3}$

C $\frac{2}{3}$

D $\frac{4}{3}$

Resposta: C $\frac{2}{3}$
Explicação: A equação $|5x-1| = x+3$ pode ser resolvida considerando dois sistemas de equações, baseados na definição de valor absoluto.
1º Sistema: $5x-1 = x+3$ com $5x-1 \geq 0$

$$\begin{cases} 5x-1 = x+3, \\ 5x-1 \geq 0. \end{cases}$$

i. Resolvendo a equação $5x-1 = x+3$:

$$5x - x = 3+1,$$

$$4x = 4 \implies x = 1.$$

ii. Verificando a condição $5x-1 \geq 0$:

$$5(1) - 1 = 4 \geq 0.$$

Portanto, $x = 1$ é uma solução válida deste sistema.

2º Sistema: $-(5x-1) = x+3$ com $5x-1 < 0$

$$\begin{cases} -(5x-1) = x+3, \\ 5x-1 < 0. \end{cases}$$

i. Resolvendo a equação $-(5x-1) = x+3$:

$$-5x+1 = x+3.$$

$$-5x - x = 3-1,$$

$$-6x = 2 \implies x = -\frac{1}{3}.$$

ii. Verificando a condição $5x-1 < 0$:

$$5\left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = -\frac{5}{3} - 1 = -\frac{8}{3} < 0.$$

Portanto, $x = -\frac{1}{3}$ é uma solução válida deste sistema.

$$S = \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}.$$

A soma dos elementos do conjunto solução é:

$$-\frac{1}{3} + 1 = \frac{-1+3}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\boxed{= \frac{2}{3}}$$

12. Qual é o número representado por $\dfrac{5!+6!}{6!}$?

A $\frac{7}{6}$

B $\frac{11}{6}$

C $5!$

D $6!$

Resposta: A $\frac{7}{6}$

Explicação: Sabendo que $6! = 6 \cdot 5!$, substituímos isso na expressão:

$$\frac{5!+6!}{6!} = \frac{5!+6\cdot 5!}{6\cdot 5!}$$

Colcando em envidência 5! no numerador:

$$\frac{\cancel{5!}(1+6)}{6\cdot\cancel{5!}} = \frac{7}{6}$$

$$\boxed{\frac{7}{6}}$$

13. Qual é a expressão do quinto termo no desenvolvimento de $(x+2)^6$?

A $C_4^8 x^3 2^5$

B $C_4^8 x^4 2^4$

C $C_5^8 x^3 2^5$

D $C_6^8 x^4 2^4$

Explicação: Utilizamos o **Teorema do Binômio de Newton**, que nos diz que o termo geral do desenvolvimento de $(x+2)^8$ é dado por:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot 2^k,$$

onde:

- $n = 8$ (expoente do binômio),
- k é o índice do termo, começando em 0.

O **quinto termo** corresponde a $k = 4$ (pois $k = 4$ gera T_5).
Substituímos $n = 8$ e $k = 4$ na fórmula:

$$\boxed{T_5 = \tbinom{8}{4} x^{8-4} \cdot 2^4}$$

14. Três homens e quatro mulheres decidiram acampar. Para garantir a vigia noturna organizaram-se em comissões de 3 elementos, todas sempre com um homem. Quantas comissões foram possíveis formar?

A 9

B 18

C 30

D 31

Resposta: B 18
Explicação: Para formar uma comissão de 3 pessoas com exatamente 1 homem:

i. Escolhemos 1 homem dos 3 disponíveis:
$$\binom{3}{1} = 3$$

ii. Escolhemos 2 mulheres das 4 disponíveis:
$$\binom{4}{2} = 6$$

iii. Multiplicamos as possibilidades:
$$3 \cdot 6 = 18$$

Portanto, o número total de comissões possíveis é:

$$\boxed{18}$$

15. Duas moedas são lançadas simultaneamente, qual é a probabilidade de caírem com a mesma face?

A 0.2

B 0.3

C 0.5

D 0.7

Resposta: C 0.5 **Explicação:** Para calcular a probabilidade de duas moedas caírem com a mesma face, podemos prosseguir do seguinte modo:

i. Definimos o nosso Espaço amostral: Quando duas moedas são lançadas, os possíveis resultados são:

$$\{(C,C),(C,K),(K,C),(K,K)\} \quad \text{Onde C é cara e K é coroa}$$

O espaço amostral tem 4 resultados possíveis.

ii. **Eventos favoráveis:** As moedas caem com a mesma face nos seguintes casos: (C,C) e (K,K) O número de eventos favoráveis é 2

iii. **Probabilidade:** A probabilidade de caírem com a mesma face é dada por:

$$P = \frac{\text{número de eventos favoráveis}}{\text{número total de resultados}} = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$\boxed{P = 0.5}$$

16. Qual é a sucessão infinitamente pequena?

A $\frac{n-1}{(n+1)^2}$

B $\frac{n+1}{n-1}$

C n^2+2000

D $2000-n^2$

Resposta: A $\frac{n-1}{(n+1)^2}$

Explicação: Uma sucessão a_n é chamada infinitamente pequena se o limite $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. E o $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{(n+1)^2}$ é zero.

17. A partir de que ordem, os termos da sucessão $a_n = \frac{2n+1}{n}$, encontram-se a menos de 0,02 do limite 2?

A 2

B 3

C 50

D 51

Resposta: D 51

A sucessão é dada por:

$$a_n = \frac{2n+1}{n}.$$

i. Calcular o limite da sucessão

Dividimos todos os termos do numerador pelo denominador n:

$$a_n = \frac{2n}{n} + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n}.$$

Quando $n \to \infty$, temos $\frac{1}{n} \to 0$, logo:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

ii. Condição para estar a menos de 0,02 do limite Queremos que a diferença entre a_n e o limite 2 seja menor que 0,02:

$$|a_n - L| < \epsilon \quad \text{(Definição de limite)}$$

$$|a_n - 2| < 0,02.$$

Substituímos $a_n = 2 + \frac{1}{n}$:

$$\left|2 + \frac{1}{n} - 2\right| < 0,02.$$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < 0,02.$$

Resolver a desigualdade Sabemos que $\frac{1}{n}$ é sempre positiva para $n > 0$, então podemos escrever:

$$\frac{1}{n} < 0,02.$$

$$n > \frac{1}{0,02}.$$

$$n > 50.$$

Os termos da sucessão estão a menos de $0,02$ do limite 2 a partir de:

$$\boxed{n = 51}.$$

18. Qual é o termo geral da sucessão $18;15;12;9;6;...$?

A $a_n = 3n - 21$
B $a_n = 21 - 3n$
C $a_n = 3n + 15$
D $a_n = -3n + 15$

Resposta: B $a_n = 21 - 3n$
Explicção: A sucessão dada é:

$$18, 15, 12, 9, 6, \ldots$$

Observamos que esta é uma progressão aritmética (PA), pois a diferença entre termos consecutivos é constante. Calculamos a razão da PA:

$$d = a_2 - a_1 = 15 - 18 = -3.$$

O termo geral de uma PA é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

onde:
- $a_1 = 18$
- $r = -3$

Substituímos os valores:

$$a_n = 18 + (n-1)(-3).$$

Simplificamos:

$$a_n = 18 - 3(n-1),$$

$$a_n = 18 - 3n + 3,$$

$$\boxed{a_n = 21 - 3n.}$$

19. De uma progressão aritmética sabe-se que o primeiro termo é 3 e a diferença 2. Qual é a soma dos primeiros 6 termos?

A 33
B 36
C 48
D 54

Dada uma progressão aritmética (PA) com:

- $a_1 = 3$ (primeiro termo),
- $r = 2$ (razão),
- $n = 6$ (número de termos),

a soma dos n primeiros termos é dada pela fórmula:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n),$$

onde a_n é o n-ésimo termo da PA, calculado pela fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

i. Calcular o 6º termo (a_6)

$$a_6 = a_1 + (6-1) \cdot r = 3 + 5 \cdot 2 = 3 + 10 = 13.$$

ii. Calcular a soma (S_6)

$$S_6 = \frac{6}{2} \cdot (a_1 + a_6) = 3 \cdot (3 + 13) = 3 \cdot 16 = 48.$$

$$\boxed{S = 48}$$

20. Numa progressão geométrica de 5 termos, $a_1 = 4$ e $a_5 = 48$. Qual é o terceiro termo?

A 12

B 30

C 24

D 72

Resposta: A 12
Explicação: Uma progressão geométrica (PG) é definida por uma sequência de termos em que a razão entre dois consecutivos é constante. Seja:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

onde:
- a_n é o n-ésimo termo,
- a_1 é o primeiro termo,
- q é a razão da PG.
Dados fornecidos:
- $a_1 = 3$
- $a_5 = 48$

Substituímos os valores na fórmula do termo geral:

$$a_1 = 3 \quad (1)$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} \implies a_1 \cdot q^4 = 48 \quad (2).$$

Substituido a equação (1) na equação (2) para encontrar a razão q:

$$4 \cdot q^4 = 48$$

$$q^4 = \frac{48}{3}$$

$$q^4 = 16$$

$$q^4 = 2^4$$

$$q = 2$$

Substituímos $q = 2$ e $a_1 = 3$ na equação de termo geral:

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

O terceiro termo da PG é:

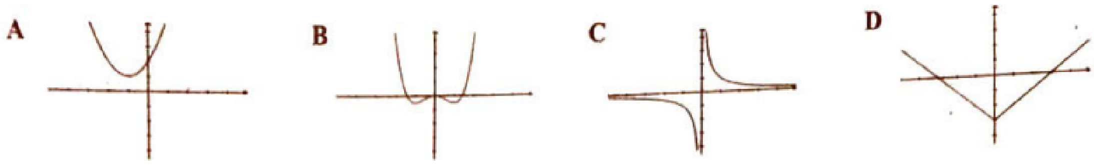
$$a_3 = 3 \cdot 2^{3-1}$$

$$a_3 = 3 \cdot 2^2$$

$$a_3 = 3 \cdot 4$$

$$\boxed{a_3 = 12}$$

21. **Qual das funções NÃO é injetiva?**



Resposta: O gráfico **B não é injetivo**.
Explicação: Para determinar qual dos gráficos **não é injetivo**, aplicamos o **teste da linha horizontal**. O gráfico que não passar no teste será o não injetivo.

Análise dos gráficos:

- **Gráfico A:** É crescente em todo o domínio. Nenhuma linha horizontal intercepta o gráfico mais de uma vez. **É injetivo.**

- **Gráfico B:** Representa uma parábola com concavidade para cima. Qualquer linha horizontal acima do vértice intercepta o gráfico em dois pontos. **Não é injetivo.**

- **Gráfico C:** Representa uma função crescente (possivelmente logarítmica). Nenhuma linha horizontal intercepta o gráfico mais de uma vez. **É injetivo.**

- **Gráfico D:** É monotonicamente crescente em todo o domínio. Nenhuma linha horizontal intercepta o gráfico mais de uma vez. **É injetivo.**

22. **Considere as funções:** $f(x) = 2^x$**;** $g(x) = \sin x$**;** $h(x) = x^2 + 5$**;** $m(x) = x^3$**. Qual é a proposição falsa?**

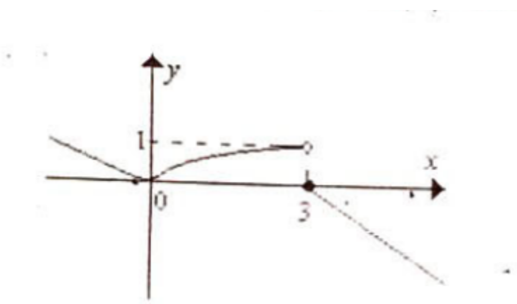
A f e m são monótonas.
B f e h podem ter domínio $\mathbb{R}$.
C f e g não têm zeros.
D g e m são ímpares.

Resposta: C f e g não têm zeros.
Explicação: Análisemos cada uma das alternativas

i. A. A função $f(x) = 2^x$ é crescente em todo $\mathbb{R}$, logo é monótona. A função $m(x) = x^3$ também é crescente em todo $\mathbb{R}$, logo é monótona.
$\therefore$ O item **A** é verdadeiro.
ii. B. A função $f(x) = 2^x$ possui domínio $\mathbb{R}$. A função $h(x) = x^2 + 5$ também possui domínio $\mathbb{R}$.
$\therefore$ O item **B** é verdadeiro.
iii. C. A função $f(x) = 2^x$ é sempre positiva ($f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$), logo não possui zeros. A função $g(x) = \sin x$ possui zeros nos pontos $x = n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$.
$\therefore$ O item **C** é falso.
iv. D. A função $g(x) = \sin x$ é ímpar, pois $\sin(-x) = -\sin(x)$. A função $m(x) = x^3$ também é ímpar, pois $(-x)^3 = -x^3$.
$\therefore$ O item **D** é verdadeiro.

A proposição falsa é **C**.

23. **Observe o gráfico da função** $y = f'(x)$**. Qual é a afirmação correta?**



A $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1 \quad e \quad f(3) = 1$
B $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1 \quad e \quad f(3) = 0$
C $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1 \quad e \quad f(3) = 0$
D $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0 \quad e \quad f(3) = 0$

Resposta: B **Explicação:** i. Observando o gráfico, notamos que:
- Quando $x \to 3^-$, o gráfico da função se aproxima de 1.
- Quando $x \to 3^+$, o gráfico também se aproxima de 1.
- O valor real da função em $x = 3$, indicado pelo ponto destacado no eixo y, é $f(3) = 0$.
ii. Agora, analisamos as alternativas:

- $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$ e $f(3) = 1$: **Falso**, pois $f(3) = 0$.
- $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$ e $f(3) = 0$: **Verdadeiro**, conforme observado no gráfico.
- $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$ e $f(3) = 0$: **Falso**, pois o limite não é 0.
- $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$ e $f(3) = 1$: **Falso**, pois $f(3) = 0$.

24. **Qual é o valor de** $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-x-10}{x^2-4}$**?**

A 3
B $\frac{5}{2}$
C $\frac{11}{4}$
D 7

Resposta: A 3 **Explicação:**
Cálculo do limite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}.$$

Dividimos numerador e denominador por x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{10}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{10}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

Quando $x \to \infty$, os termos $\frac{1}{x}$, $\frac{10}{x^2}$ e $\frac{4}{x^2}$ tendem a 0. Assim:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3-0-0}{1-0} = \frac{3}{1} = 3.$$

25. **Qual é o valor de** $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+2}{3x^3+1}$**?**

A ∞
B 3
C $\frac{1}{3}$
D 0

Resposta: D 0
Explicação:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x + 2}{3x^3 + 1}.$$

Dividimos o numerador e o denominador pelo maior termo de grau no denominador, x^3:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x + 2}{3x^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{2}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^3}}.$$

Agora, ao tomar o limite $x \to -\infty$, temos que $\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{1}{x^2} \to 0$, $\frac{2}{x^3} \to 0$, e $\frac{1}{x^3} \to 0$. Assim:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^3}} = \frac{0-0+0}{3+0} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+2}{3x^3+1} = 0}$$

26. **Qual é o valor de** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$**?**

A 0

B 1

C -1

D ∞

Resposta: A 0
Explicação: Cálculo do limite:
Reescrevendo o limite Usamos a propriedade $\sin^2 x = (\sin x)^2$, então:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x}.$$

Passo 2: Separando os termos Podemos reescrever a fração como o produto de dois limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\sin x \cdot \frac{\sin x}{x}\right).$$

Tendo em conta que:

- $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$,
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (Limite fundamental)

$$\lim_{x\to 0} \left(\sin x \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \sin x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$0 \cdot 1 = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0}$$

27. **Qual é o valor de** $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^x$**?**

A e^5

B e^2

C e^3

D e^4

Resposta: A e^5
Explicação: Sabendo que:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

Neste caso, $a = 5$. Logo:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^x = e^5.$$

28. **Para que a função** $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x \le 0 \\ k-4, & x > 0 \end{cases}$ **seja contínua no ponto de abscissa** $x = 0$**, qual deve ser o valor de** k**?**

A $\frac{-3}{4}$

B $\frac{1}{2}$

C 1

D 4

Resposta: C 1
Explicação: Para que a função seja contínua no ponto $x = 0$, é necessário que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

Cálculo do limite à esquerda ($x \to 0^-$)

Quando $x \leq 0$, a função é $f(x) = 2x - 3$. Assim:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2(0) - 3 = -$$

Cálculo do limite à direita ($x \to 0^+$)

Quando $x > 0$, a função é $f(x) = k - 4$. Assim:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = k - 4$$

Para a continuidade em $x = 0$, temos:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$-3 = k - 4.$$

$$\boxed{k = 1}$$

29. **Em que ponto a função** $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 2 \\ x^2 - 5, & 2 \leq x < 3 \\ x + 1, & x > 3 \end{cases}$ **tem uma descontinuidade eliminável?**

A -5

B -1

C 2

D 3

Resposta: D 3

Explicação: Para determinar o ponto onde a função $f(x)$ apresenta uma descontinuidade eliminável, analisamos os limites laterais em $x = 2$ e $x = 3$, pois são os pontos onde a definição da função muda.

Passo 1: Verificação em $x = 2$

Para $x < 2$, a função é $f(x) = 2x - 1$. Assim:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2(2) - 1 = 3$$

Para $x \geq 2$, a função é $f(x) = x^2 - 5$. Assim:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2^2 - 5 = 4 - 5 = -1$$

Como $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$, a função apresenta uma descontinuidade de salto em $x = 2$, que não é eliminável.

Passo 2: Verificação em $x = 3$

Para $x < 3$, a função é $f(x) = x^2 - 5$. Assim:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 3^2 - 5 = 9 - 5 = 4$$

Para $x > 3$, a função é $f(x) = x + 1$. Assim:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 3 + 1 = 4$$

Como $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$, mas $f(3)$ não está definido (pois $x = 3$ não pertence a nenhum intervalo), a função apresenta uma descontinuidade eliminável em $x = 3$.

A função tem uma descontinuidade eliminável no ponto:

$$\boxed{x = 3}$$

30. **Qual é a opção correta?**

A O sinal da derivada gera a variação da função

B Uma função não é derivável se for contínua

C Uma função admite derivada nula somente em vértices

D Toda função admite derivada em todo seu domínio

Resposta: A
Explicação: Análise das opções

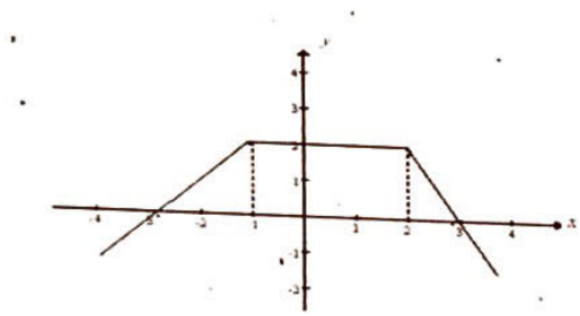
i. **Opção A:** O sinal da derivada gera a variação da função. *Correto.* O sinal da derivada indica o comportamento da função:
- Se $f'(x) > 0$, a função é crescente.
- Se $f'(x) < 0$, a função é decrescente.
O sinal da derivada está diretamente relacionado à variação da função.

i. **Opção B:** Uma função não é derivável se for contínua. *Incorreto.* Uma função pode ser contínua e derivável, mas a continuidade não garante a derivabilidade. Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ é contínua em todo o domínio, mas não é derivável em $x = 0$.

i. **Opção C:** Uma função admite derivada nula somente em vértices. *Incorreto.* A derivada nula ocorre em pontos críticos, que podem ser vértices (máximos ou mínimos) ou pontos de inflexão.

i. **Opção D:** Toda função admite derivada em todo seu domínio. *Incorreto.* Nem todas as funções são deriváveis em todo seu domínio. Por exemplo, $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$.

31. **Observe o gráfico da função $y = f'(x)$. Qual é o valor de $f'(-2)$?**



A -1

B 0

C 1

D 2

Resposta: C 1
Explicação:
i. O gráfico fornecido representa a derivada da função, ou seja, $y = f'(x)$. Assim, os valores do gráfico indicam diretamente os valores da derivada $f'(x)$ em cada ponto x.

ii. Para $x = -2$, observamos que o gráfico apresenta $y = 1$. Logo, o valor da derivada é:

$$f'(-2) = 1$$

32. **Qual é a primeira derivada da função $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$?**

A $-\frac{1}{x^2}$

B $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x}$

C $\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}$

D $-\frac{1}{x} + x$

A derivada de $f(x)$ é:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{d}{dx}(\ln(x)).$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

33. **Sendo $f(x) = \sin(2x)$, qual é o valor de $f'(\pi)$?**

A -2

B 0

C 2

D 2π

A derivada de $f(x)$ é:

$$f'(x) = \cos(2x) \cdot \frac{d}{dx}(2x) = 2\cos(2x).$$

Calculamos $f'(\pi)$:

$$f'(\pi) = 2\cos(2\pi).$$

Como $\cos(2\pi) = 1$, temos:

$$f'(\pi) = 2.$$

34. **Considere a função $f(x) = e^{2x+1}$. Qual é a expressão de $f''(x)$?**

A $4e^{2x+1}$

B $2e^{2x+!}$

C $2e^{x+1}$

D e^{2x+1}

A função dada é $f(x) = e^{2x+1}$. A primeira derivada de $f(x)$ é:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{2x+1}\right) = e^{2x+1} \cdot \frac{d}{dx}(2x+1).$$

Como $\frac{d}{dx}(2x+1) = 2$, temos:

$$f'(x) = 2e^{2x+1}.$$

Agora, derivamos novamente para encontrar $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(2e^{2x+1}\right).$$

A constante 2 permanece, e a derivada de e^{2x+1} é novamente $e^{2x+1} \cdot \frac{d}{dx}(2x+1)$. Assim:

$$f''(x) = 2 \cdot e^{2x+1} \cdot 2.$$

Simplificando:

$$f''(x) = 4e^{2x+1}.$$

35. **A diferença entre dois números é 6. Quais são esses números se o produto dos mesmos for mínimo?**

A -6 e -3

B -3 e 3

C -6 e 3

D -9 e 3

Somente para Secção de Letras

36. **Qual é o quociente da divisão do polinômio $p(x) = 4x^2 - 2x + 3x - 3$ por $x - 1$?**

A $4x^2 + 2x + 3$

B $2x^2 + x - 3$

C $4x^2 - 3x$

D $2x + 1$

Resposta: A $4x^2 + 2x + 3$
Explicação: Para a obtenção do quociente, podemos usar vários métodos, como é o caso do método de Ruffini como podemos ver a seguir sendo que $x - 1 = 0$ ou seja $x = 1$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & & 4 & 2 & 3 \\ \hline & 4 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

Assim o quociente obtido é $\boxed{Q = 4x^2 + 2x + 3}$ e resto $R = 0$.

37. **Considere os conjuntos $M =]-\infty; 11]$ e $N = [0; 17]$. No universo $\mathbb{R}$, qual é o conjunto correspondente $M \setminus N$?**

A $]-\infty;0[$

B $]-\infty;0]$

C $[0;+\infty]$

D $[0;+\infty[$

Resposta: D $[0;+\infty[$ Primeiro, determinamos o conjunto $M \setminus N$, que é dado pelos elementos de M que não pertencem a N.

Representação dos conjuntos

- $M =]-\infty;11]$: o conjunto de todos os números reais menores ou iguais a 11.
- $N = [0;17[$: o conjunto de todos os números reais entre 0 (inclusive) e 17 (exclusive).

Diferença $M \setminus N$
A diferença $M \setminus N$ consiste nos elementos de M que não estão em N. Observamos que:

- Em M, todos os números pertencem ao intervalo $]-\infty;11]$.
- Em N, todos os números em $[0;11]$ devem ser excluídos.

Logo:

$$M \setminus N =]-\infty;0[$$

Conjunto complementar de $M \setminus N$ no universo $\mathbb{R}$

O complementar de $M \setminus N =]-\infty;0[$ no universo $\mathbb{R}$ é o conjunto de todos os números reais que não pertencem a $]-\infty;0[$. Assim:

$$\boxed{(M \setminus N)^c = [0;+\infty[.}$$

38. Numa festa 5 pessoas comeram somente mariscos, 9 comeram vegetais e 2 comeram mariscos e vegetais. Sabendo que cada um comeu pelo menos um prato, **quantas pessoas estavam na festa**?

A 18

B 16

C 14

D 12

Resposta: D 12
Explicação: Vamos determinar o número total de pessoas na festa utilizando o princípio da inclusão-exclusão.

- Seja M o conjunto das pessoas que comeram mariscos (M = 5).
- Seja V o conjunto das pessoas que comeram vegetais (V = 9).
- O número de pessoas que comeram ambos os pratos (mariscos e vegetais) é M ∩ V = 2.

Pelo princípio da inclusão-exclusão, o total de pessoas, ou seja, M ∪ V, é dado por:

$$M \cup V = M + V - M \cap V$$

Substituímos os valores conhecidos:

$$M \cup V = 5 + 9 - 2 = 12$$

$$\boxed{\text{M} \cup \text{V} = 12}$$

39. Os gráficos $f(x) = k^x$ e $g(x) = x^2 - 1$ intersectam-se no ponto de abcissa $x = 2$. Qual é o valor de k?

A 1

B 2

C 3

D 4

Resposta: B 2 Sabemos que os gráficos $f(x) = k^x$ e $g(x) = x^2 - 1$ se intersectam no ponto de abcissa $x = 3$. Isso implica que:

$$f(3) = g(3).$$

Substituímos as expressões das funções:

$$k^3 = 3^2 - 1$$

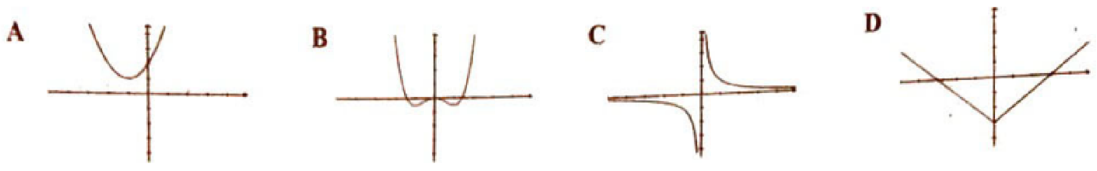
$$k^3 = 9 - 1$$

$$k^3 = 8$$

$$k = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\boxed{k = \mathbf{2}}$$

40. Qual é o gráfico que representa a função ímpar?



Resposta: C **Explicação:** Para identificar o gráfico que representa uma função ímpar, uma função $f(x)$ é ímpar se satisfaz a propriedade:

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{para todo } x.$$

Isso implica que o gráfico de $f(x)$ possui simetria em relação à origem.

Análise dos gráficos:
- Gráfico A: É uma parábola voltada para cima, simétrica em relação ao eixo y, o que caracteriza uma função par.
- Gráfico B: Representa uma função com duas "aberturas" voltadas para cima e também simétrica em relação ao eixo y. É uma função par.
- Gráfico C: Possui comportamento simétrico em relação à origem. Isso sugere que seja uma função ímpar.
- Gráfico D: É uma função linear com forma de "V". Não apresenta simetria em relação à origem nem ao eixo y. Não é par nem ímpar.

O gráfico que representa uma função ímpar é o Gráfico C.

Somente Secção para Ciências

36. **Qual é a distância do ponto $P(1;4)$ à recta de equação $3x - 4y + 6 = 0$?**

A) 5

B) 4

C) $\frac{19}{5}$

D) $\frac{7}{5}$

$$\boxed{d = \frac{7}{5}}$$

A fórmula da distância de um ponto $P(x_1, y_1)$ à recta $ax + by + c = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Substituindo $a = 3$, $b = -4$, $c = 6$, $x_1 = 1$ e $y_1 = 4$:

$$d = \frac{|3(1) - 4(4) + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 - 16 + 6|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-7|}{5} = \frac{7}{5}.$$

Resposta: D) $\frac{7}{5}$**.**

37. **Na função $h(x) = \frac{2x+6}{x-1}$, qual é a equação da assímptota vertical?**

A $x = 1$

B $x = 2$

C $y = 1$

D $y = 2$

Resposta: A $x = 1$
Explicação: A assímptota vertical ocorre quando o denominador se anula, ou seja, $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

38. **Qual é a expressão equivalente a $z = \frac{13}{3-4i}$?**

A $\dfrac{3-4i}{7}$

B $\dfrac{3+4i}{7}$

C $\dfrac{39-52i}{25}$

D $\dfrac{39+52i}{25}$

Resposta: D $\frac{39+52i}{25}$
Explicação: Multiplicamos numerador e denominador pelo conjugado do denominador:

$$z = \frac{13}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{13(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{39+52i}{9+16} = \frac{39+52i}{25}.$$

39. **A que é igual $\int(4x^3 - 2x)dx$?**

A $12x^2 - 2x + c$

B $16x^4 - 4x^2 + c$

C $x^4 - x^2 + c$

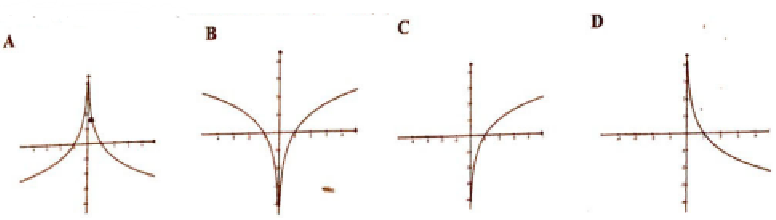
D $4x^3 - 2x^2 + c$

Resposta: C $x^4 - x^2 + c$
Explicação: Integramos cada termo separadamente:

$$\int 4x^3 dx = x^4, \quad \int -2x dx = -x^2$$

$$\boxed{\int(4x^3 - 2x)dx = x^4 - x^2 + C}$$

40. Qual é o gráfico que representa a função $y = \log_2 |x|$?



Resposta: B