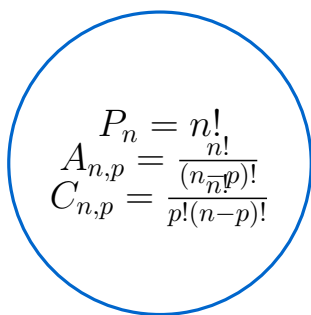


# Resumo Premium

Análise Combinatória

para Exames UEM


$$\begin{aligned} P_n &= n! \\ A_{n,p} &= \frac{n!}{(n-p)!} \\ C_{n,p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \end{aligned}$$

Preparação Completa  
Universidade Eduardo Mondlane

---

# Conteúdo

|           |                                                            |          |
|-----------|------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b>  | <b>Introdução à Análise Combinatória</b>                   | <b>2</b> |
| 1.1       | Aplicações Práticas . . . . .                              | 2        |
| <b>2</b>  | <b>Princípios Fundamentais da Contagem</b>                 | <b>2</b> |
| 2.1       | Princípio Aditivo . . . . .                                | 2        |
| 2.2       | Princípio Multiplicativo . . . . .                         | 2        |
| <b>3</b>  | <b>Fatorial</b>                                            | <b>3</b> |
| 3.1       | Definição . . . . .                                        | 3        |
| 3.2       | Propriedades Importantes . . . . .                         | 3        |
| <b>4</b>  | <b>Permutações</b>                                         | <b>3</b> |
| 4.1       | Permutações Simples . . . . .                              | 3        |
| 4.2       | Permutações com Repetição . . . . .                        | 3        |
| 4.3       | Permutações Circulares . . . . .                           | 3        |
| <b>5</b>  | <b>Arranjos</b>                                            | <b>4</b> |
| 5.1       | Arranjos Simples . . . . .                                 | 4        |
| 5.2       | Arranjos com Repetição . . . . .                           | 4        |
| <b>6</b>  | <b>Combinações</b>                                         | <b>4</b> |
| 6.1       | Combinações Simples . . . . .                              | 4        |
| 6.2       | Propriedades das Combinações . . . . .                     | 4        |
| 6.3       | Combinações com Repetição . . . . .                        | 4        |
| <b>7</b>  | <b>Como Distinguir: Permutação, Arranjo ou Combinação?</b> | <b>5</b> |
| <b>8</b>  | <b>Técnicas e Atalhos para Exames</b>                      | <b>5</b> |
| 8.1       | Dicas Rápidas . . . . .                                    | 5        |
| 8.2       | Armadilhas Comuns . . . . .                                | 5        |
| <b>9</b>  | <b>Exemplos Resolvidos</b>                                 | <b>5</b> |
| 9.1       | Exemplo 1 - Permutação . . . . .                           | 5        |
| 9.2       | Exemplo 2 - Arranjo . . . . .                              | 6        |
| 9.3       | Exemplo 3 - Combinação . . . . .                           | 6        |
| <b>10</b> | <b>Exercícios Propostos</b>                                | <b>6</b> |
| 10.1      | Permutações . . . . .                                      | 6        |
| 10.2      | Arranjos . . . . .                                         | 6        |
| 10.3      | Combinações . . . . .                                      | 7        |
| 10.4      | Problemas Mistos . . . . .                                 | 7        |
| <b>11</b> | <b>Resumo Final - Fórmulas Principais</b>                  | <b>7</b> |
| 11.1      | Dicas Finais para o Exame . . . . .                        | 7        |

# 1 Introdução à Análise Combinatória

A **Análise Combinatória** é o ramo da matemática que estuda métodos de contagem. É fundamental nos exames da UEM porque aparece frequentemente em questões que exigem raciocínio lógico e capacidade de organização.

**Por que cai na UEM?** A análise combinatória desenvolve o pensamento lógico e é aplicada em probabilidade, estatística e outras áreas do conhecimento universitário.

## 1.1 Aplicações Práticas

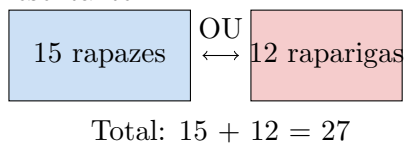
- Formar comissões e grupos
- Organizar filas e sequências
- Calcular senhas e códigos
- Resolver problemas de probabilidade

# 2 Princípios Fundamentais da Contagem

## 2.1 Princípio Aditivo

Se duas acções são **mutuamente exclusivas** (não podem ocorrer simultaneamente), então o número total de possibilidades é a **soma** das possibilidades de cada acção.

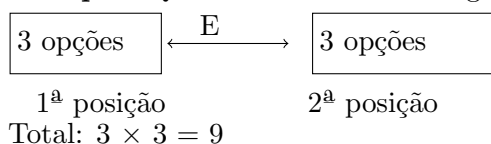
**Exemplo:** Uma turma tem 15 rapazes e 12 raparigas. Quantas maneiras há de escolher um representante?



## 2.2 Princípio Multiplicativo

Se duas acções são **independentes** (uma não afecta a outra), então o número total de possibilidades é o **produto** das possibilidades de cada acção.

**Exemplo:** Quantos números de 2 algarismos podemos formar com os dígitos {1, 2, 3}?



**Dica rápida:** Use "OU" para somar, "E" para multiplicar!

## 3 Fatorial

### 3.1 Definição

O fatorial de um número natural  $n$  é o produto de todos os números naturais de 1 até  $n$ :

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$$

**Casos especiais:**

- $0! = 1$  (por definição)
- $1! = 1$

### 3.2 Propriedades Importantes

- $n! = n \times (n - 1)!$
- $\frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)$
- $\frac{n!}{k! \times (n-k)!} = C_{n,k}$

**Exemplos de cálculo:**

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \quad (1)$$

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210 \quad (2)$$

## 4 Permutações

### 4.1 Permutações Simples

O número de maneiras de organizar  $n$  objectos distintos em fila é:

$$P_n = n!$$

**Exemplo:** De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar-se numa fila?

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

### 4.2 Permutações com Repetição

Quando temos  $n$  objectos onde alguns se repetem ( $n_1$  do tipo 1,  $n_2$  do tipo 2, etc.), o número de permutações é:

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_k}^n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

**Exemplo:** Quantos anagramas tem a palavra BANANA? - Total de letras: 6 - A aparece 3 vezes, N aparece 2 vezes, B aparece 1 vez

$$P_{1,3,2}^6 = \frac{6!}{1! \times 3! \times 2!} = \frac{720}{1 \times 6 \times 2} = \frac{720}{12} = 60$$

### 4.3 Permutações Circulares

Para organizar  $n$  objectos em círculo (onde rotações são consideradas iguais):

$$P_c = (n - 1)!$$

**Exemplo:** De quantas maneiras 6 pessoas podem sentar-se ao redor de uma mesa circular?

$$P_c = (6 - 1)! = 5! = 120$$

## 5 Arranjos

### 5.1 Arranjos Simples

O número de maneiras de escolher e organizar  $p$  objectos de um total de  $n$  objectos distintos é:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

**Diferença key:** Nos arranjos, a **ordem importa!**

**Exemplo:** Quantas maneiras há de escolher presidente e vice-presidente numa turma de 20 alunos?

$$A_{20,2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = 20 \times 19 = 380$$

### 5.2 Arranjos com Repetição

Quando podemos repetir elementos:

$$AR_{n,p} = n^p$$

**Exemplo:** Quantos números de 4 algarismos podemos formar usando os dígitos  $\{1,2,3\}$ ?

$$AR_{3,4} = 3^4 = 81$$

## 6 Combinações

### 6.1 Combinações Simples

O número de maneiras de escolher  $p$  objectos de um total de  $n$  objectos distintos, onde a **ordem não importa**:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**Exemplo:** Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas com 10 pessoas?

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120$$

### 6.2 Propriedades das Combinações

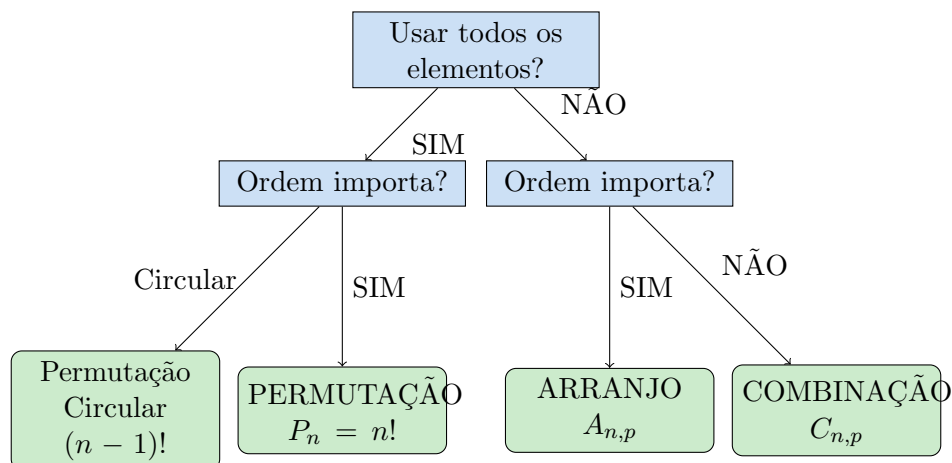
- $C_{n,0} = 1$
- $C_{n,n} = 1$
- $C_{n,p} = C_{n,n-p}$
- $C_{n,1} = n$

### 6.3 Combinações com Repetição

Quando podemos repetir elementos:

$$CR_{n,p} = C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

## 7 Como Distinguir: Permutação, Arranjo ou Combinação?



**Erro comum:** Confundir arranjo com combinação. Lembre-se: se a ordem importa, é arranjo; se não importa, é combinação!

## 8 Técnicas e Atalhos para Exames

### 8.1 Dicas Rápidas

1. **Palavras-chave:** "formar fila" = permutação; "escolher grupo" = combinação
2. **Simplificação:**  $C_{n,2} = \frac{n(n-1)}{2}$  e  $C_{n,3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
3. **Verificação:** Arranjo sempre  $\geq$  Combinação para os mesmos valores
4. **Factorial grande:** Use  $\frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$

### 8.2 Armadilhas Comuns

- Esquecer que  $0! = 1$
- Confundir "pelo menos" com "exactamente"
- Não perceber quando há repetição de elementos
- Esquecer de considerar se a ordem importa ou não

## 9 Exemplos Resolvidos

### 9.1 Exemplo 1 - Permutação

**Problema:** Quantos anagramas da palavra MOÇAMBIQUE começam com M?

---

**Resolução passo a passo:**

1. Fixamos M na primeira posição
2. Restam 9 letras para permutar nas 9 posições restantes
3. Como todas as letras são diferentes:  $P_9 = 9! = 362880$

**Resposta:** 362 880 anagramas

## 9.2 Exemplo 2 - Arranjo

**Problema:** De quantas maneiras podemos escolher e organizar 4 livros de uma estante com 12 livros?

**Resolução passo a passo:**

1. Escolhemos 4 livros de 12 e a ordem importa
2. Isso é um arranjo:  $A_{12,4}$
3.  $A_{12,4} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880$

**Resposta:** 11 880 maneiras

## 9.3 Exemplo 3 - Combinação

**Problema:** Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas com 8 homens e 6 mulheres, sendo 3 homens e 2 mulheres?

**Resolução passo a passo:**

1. Escolher 3 homens de 8:  $C_{8,3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$
2. Escolher 2 mulheres de 6:  $C_{6,2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$
3. Total:  $56 \times 15 = 840$  (princípio multiplicativo)

**Resposta:** 840 comissões

# 10 Exercícios Propostos

## 10.1 Permutações

1. Quantos anagramas tem a palavra MAPUTO?
2. De quantas maneiras 7 pessoas podem sentar-se numa mesa circular?
3. Quantos números de 5 algarismos distintos podemos formar com  $\{1,2,3,4,5,6\}$ ?

## 10.2 Arranjos

4. De quantas maneiras podemos distribuir 3 prémios diferentes para 10 pessoas?
5. Quantas placas de carro podemos formar com 3 letras seguidas de 4 números?
6. De quantas maneiras podemos escolher presidente, vice-presidente e secretário numa turma de 25 alunos?

### 10.3 Combinações

7. Quantos grupos de 4 pessoas podem ser formados com 12 pessoas?
8. De quantas maneiras podemos escolher 5 cartas de um baralho de 52 cartas?
9. Numa turma de 15 rapazes e 10 raparigas, quantas comissões de 6 pessoas (3 rapazes e 3 raparigas) podem ser formadas?

### 10.4 Problemas Mistos

10. Quantos números ímpares de 4 algarismos podemos formar com  $\{1,2,3,4,5\}$ ?
11. De quantas maneiras 5 casais podem sentar-se numa fila, de modo que cada casal fique junto?
12. Numa prateleira cabem 8 livros. Temos 5 livros de matemática e 6 de física. De quantas maneiras podemos arrumá-los se os livros da mesma matéria devem ficar juntos?
13. Quantas diagonais tem um polígono de 12 lados?
14. De quantas maneiras podemos dividir 12 pessoas em 3 grupos de 4 pessoas cada?

## 11 Resumo Final - Fórmulas Principais

| Tipo                    | Fórmula                                    | Quando usar                  |
|-------------------------|--------------------------------------------|------------------------------|
| Permutação Simples      | $P_n = n!$                                 | Organizar todos os elementos |
| Permutação c/ Repetição | $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots}$ | Elementos repetidos          |
| Permutação Circular     | $(n-1)!$                                   | Arranjo em círculo           |
| Arranjo Simples         | $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$              | Escolher e organizar         |
| Arranjo c/ Repetição    | $AR_{n,p} = n^p$                           | Pode repetir elementos       |
| Combinação Simples      | $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$            | Escolher sem organizar       |
| Combinação c/ Repetição | $CR_{n,p} = C_{n+p-1,p}$                   | Escolher c/ repetição        |

### 11.1 Dicas Finais para o Exame

#### No dia do exame:

1. Leia o problema 2 vezes antes de resolver
2. Identifique se é permutação, arranjo ou combinação
3. Verifique se há repetição de elementos
4. Confirme se a ordem importa ou não
5. Simplifique factoriais antes de calcular
6. Verifique se a resposta faz sentido

**Lembre-se:** A análise combinatória é mais sobre raciocínio lógico do que decorar fórmulas. Entenda o problema primeiro, depois aplique a fórmula correcta!

**Boa sorte no seu exame da UEM!**

*Alcino Pedro - Preparação para Exames UEM*

☎ 834019030