FILOSCHOOL

MANUAL DE MATEMÁTICA

Para exames de admissão

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\vec{AB} = B - A$$

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$A = 2\pi r^2$$

Autores:

Alcino Jacinto Pedro
Danilson Julião Mateus
Leonel dos Santos Orlando

Sumário

Introdução

Caro estudante,

Este manual chega às tuas mãos com um único propósito: ser a chave que abre a porta para a tua próxima conquista académica. Sabemos que a matemática pode parecer um desafio, mas a **Filoschool** preparou-se para te mostrar que és mais que capaz.

Encontrarás neste material:

- Explicações simples para conceitos complexos
- Exercícios resolvidos passo a passo
- Problemas práticos semelhantes aos dos exames

Este não é um livro comum. É um guia prático que fala a tua língua, feito especificamente para o contexto moçambicano. Cada página foi pensada para construir tua confiança e conhecimento.

Pega neste material, confia no teu potencial e vamos juntos vencer este desafio.
Estamos aqui para ajudar com qualquer dúvida ou informação de que você precise. Se você tiver alguma pergunta ou precisar de assistência, sinta-se à vontade para entrar em contato comigo no WhatsApp. Estou disponível para conversar e ajudar no que for necessário. Aguardo o seu contato! 879369395

A equipa Filoschool
A caminho do teu sucesso


TrocaPay
Seu saldo de PayPal em Metical, Rápido e Seguro.
O seu saldo
PayPal no M-pesa
Transfere o seu saldo
ESTAGNADO no PayPal
para o M-pesa ou E-mola
por uma Taxa adicional
de +12%
SOLICITE -NOS
Cell: +258 87 936 9395
Morada: Polana Caniço A,
Av. Vladimir Lenine, Maputo,
Moçambique
Fácil, Rápido
e Seguro


TrocaPay
Aceitamos toda
Moeda
estrangeira
Pagamentos mobile
Digital câmbio
Transferência carteiras
móveis
Cartões de crédito
SOLICITE NOS JÁ
Telefone
879369395
Morada
Polana Caniço A, Av. Vladimir
Lenine, Maputo, Moçambique

Capítulo 1

Matemática Básica

1.1 Conjuntos Numéricos

Os **conjuntos numéricos** são agrupamentos de números que possuem características e propriedades similares. Eles são fundamentais na matemática e servem como base para diversos conceitos e operações.

Principais Conjuntos Numéricos

1. **Números Naturais ($\mathbb{N}$):**
   - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$
   - Utilizados para contagem e ordenação
   - Alguns autores não incluem o zero: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
2. **Números Inteiros ($\mathbb{Z}$):**
   - $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
   - Incluem os números naturais e seus opostos (negativos)
   - $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ (inteiros positivos)
   - $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, ...\}$ (inteiros negativos)
3. **Números Racionais ($\mathbb{Q}$):**
   - $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$
   - Podem ser expressos como frações
   - Incluem decimais finitos e infinitos periódicos
4. **Números Irracionais ($\mathbb{I}$):**
   - Não podem ser expressos como frações
   - Decimais infinitos não periódicos
   - Exemplos: π, $\sqrt{2}$, e
5. **Números Reais ($\mathbb{R}$):**
   - União de todos os números racionais e irracionais
   - Representam todos os pontos de uma reta numérica

Relação entre os Conjuntos

A relação de inclusão entre os conjuntos numéricos é:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Onde:

- Todo número natural é também inteiro
- Todo número inteiro é também racional
- Todo número racional é também real

1.1.1 Diferença entre Números Racionais e Irracionais

Números Racionais

Características:

- Podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$ onde $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$
- Representação decimal finita ou infinita periódica
- Exemplos: $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{3} = 0,333...$; $\frac{22}{7} = 3,142857142857...$

Tipos de representação decimal:

- **Decimal exato:** $\frac{3}{4} = 0,75$
- **Dízima periódica simples:** $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\overline{3}$
- **Dízima periódica composta:** $\frac{5}{6} = 0,8333... = 0,8\overline{3}$

Números Irracionais

Características:

- **Não** podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$
- Representação decimal infinita não periódica
- Exemplos: $\pi = 3,14159265...$; $\sqrt{2} = 1,41421356...$; $e = 2,71828182...$

Principais tipos:

- **Raízes não exatas:** $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$
- **Constantes matemáticas:** π, e, ϕ (número áureo)
- **Logaritmos:** $\log_2 3$, $\ln 2$

1.1.2 Operações com Números Reais

Jogo de Sinais - A Regra Fundamental

Existe apenas **uma regra** que você precisa entender para trabalhar com números positivos e negativos:
O sinal indica uma direção:

- **Positivo (+):** caminha para a direita na reta numérica
- **Negativo (-):** caminha para a esquerda na reta numérica

Jogo de Sinais:

- **Sinais iguais:** resultado positivo

- **Sinais diferentes:** resultado negativo

Esta regra funciona para multiplicação, divisão e quando temos sinais seguidos.

Adição e Subtração

Quando os sinais são iguais:

- Some os valores e mantenha o sinal.

Quando os sinais são diferentes:

- Subtraia o menor do maior
- O resultado fica com o sinal do maior número

Exemplos de Adição e Subtração

Sinais iguais:

- $7 + 3 = 10$ (positivo e positivo)
- $(-7) + (-3) = -7 - 3 = -10$ (negativo e negativo)

Sinais diferentes:

- $7 + (-3) = 7 - 3 = 4$ (maior é 7, então resultado é positivo)
- $3 + (-7) = 3 - 7 = -4$ (maior é 7, então resultado é negativo)
- $(-5) + 8 = 3$ (maior é 8, então resultado é positivo)

Jogo de sinais em sequência:

- $5 + (-3) = 5 - 3 = 2$
- $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$
- $(-5) + (-3) = -5 - 3 = -8$
- $(-5) - (-3) = -5 + 3 = -2$

Multiplicação e Divisão

A regra é simples:
Sinais iguais Resultado positivo

- $(+) \times (+) = (+)$
- $(-) \times (-) = (+)$
- $(+) \div (+) = (+)$
- $(-) \div (-) = (+)$

Sinais diferentes Resultado negativo

- $(+) \times (-) = (-)$
- $(-) \times (+) = (-)$
- $(+) \div (-) = (-)$
- $(-) \div (+) = (-)$

Exemplos de Multiplicação e Divisão

Multiplicação:

- $4 \times 3 = 12$ (sinais iguais positivo)
- $(-4) \times (-3) = 12$ (sinais iguais positivo)
- $4 \times (-3) = -12$ (sinais diferentes negativo)
- $(-4) \times 3 = -12$ (sinais diferentes negativo)

Divisão:

- $12 \div 4 = 3$ (sinais iguais positivo)
- $(-12) \div (-4) = 3$ (sinais iguais positivo)
- $12 \div (-4) = -3$ (sinais diferentes negativo)
- $(-12) \div 4 = -3$ (sinais diferentes negativo)

Múltiplas operações:

- $(-2) \times (-3) \times 4 = 6 \times 4 = 24$
- $(-2) \times 3 \times (-4) = (-6) \times (-4) = 24$
- $(-2) \times (-3) \times (-4) = 6 \times (-4) = -24$

Dicas Práticas

1. **Para não errar com sinais:**
   - Conte quantos sinais negativos existem
   - Se for par resultado positivo
   - Se for ímpar resultado negativo
2. **Jogo de sinais consecutivos:**
   - $+(+) = +$ (sinal positivo não muda nada)
   - $+(-) = -$ (sinal positivo seguido de negativo vira negativo)
   - $-(+) = -$ (sinal negativo seguido de positivo vira negativo)
   - $-(-) = +$ (sinal negativo seguido de negativo vira positivo)
3. **Lembre-se:**
   - Zero não é positivo nem negativo
   - Qualquer número multiplicado por zero é zero
   - Não se pode dividir por zero

1.1.3 Intervalos Reais

O que são Intervalos

Um **intervalo** é um subconjunto dos números reais que contém todos os números reais entre dois valores dados, chamados de **extremos** do intervalo.
Os intervalos são uma forma de representar conjuntos de números reais de maneira contínua e são fundamentais para expressar domínios, imagens e soluções de inequações.

Tipos de Intervalos

Intervalo Fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

- Os extremos a e b **pertencem** ao intervalo
- Representação na reta: pontos cheios nos extremos

Intervalo Aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

- Os extremos a e b **não pertencem** ao intervalo
- Representação na reta: pontos vazios nos extremos

Intervalos Semifechados:

- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (fechado à esquerda, aberto à direita)
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (aberto à esquerda, fechado à direita)

Intervalos Infinitos:

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Pertinência nos Intervalos

Exemplo 1: Considere o intervalo $[2, 5]$

- $2 \in [2, 5]$ (o extremo 2 pertence ao intervalo fechado)
- $5 \in [2, 5]$ (o extremo 5 pertence ao intervalo fechado)
- $3,5 \in [2, 5]$ (qualquer valor entre os extremos pertence)
- $1 \notin [2, 5]$ (valor menor que o extremo inferior)
- $6 \notin [2, 5]$ (valor maior que o extremo superior)

Exemplo 2: Considere o intervalo $(2, 5)$

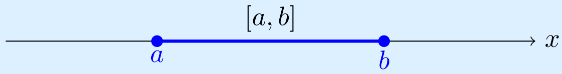
- $2 \notin (2, 5)$ (o extremo 2 não pertence ao intervalo aberto)
- $5 \notin (2, 5)$ (o extremo 5 não pertence ao intervalo aberto)
- $3,5 \in (2, 5)$ (qualquer valor entre os extremos pertence)
- $2,1 \in (2, 5)$ (valor próximo ao extremo, mas dentro do intervalo)
- $4,9 \in (2, 5)$ (valor próximo ao extremo, mas dentro do intervalo)

Exemplo 3: Considere o intervalo $[2, 5)$

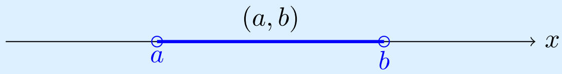
- $2 \in [2, 5)$ (extremo fechado pertence)
- $5 \notin [2, 5)$ (extremo aberto não pertence)
- $4,99 \in [2, 5)$ (valor próximo ao extremo aberto, mas dentro)

Representação na Recta Real

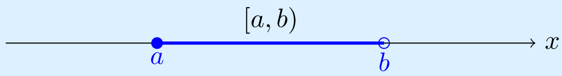
Intervalo Fechado $[a, b]$**:**



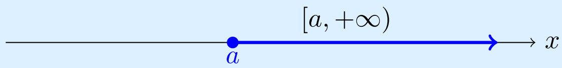
Intervalo Aberto (a, b)**:**



Intervalo Semifechado $[a, b)$**:**



Intervalo Infinito $[a, +\infty)$**:**



Legenda:

- **Ponto cheio (•):** o extremo pertence ao intervalo
- **Ponto vazio (◦):** o extremo não pertence ao intervalo
- **Linha espessa:** todos os pontos da linha pertencem ao intervalo

1.2 Teoria de conjuntos

A **Teoria de Conjuntos** é o ramo da Matemática que estuda as **coleções** de objetos, chamadas de **conjuntos**, e as **relações** entre eles. É uma base fundamental para toda a matemática moderna.

1.2.1 Representação de Conjuntos

Definição de Conjunto

Um **conjunto** é uma coleção bem definida de objetos, chamados de **elementos**. Os elementos de um conjunto são únicos e não há ordem específica.
Formas de representar conjuntos:

- **Enumeração**: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- **Descrição**: $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 5\}$
- **Diagrama de Venn**: Representação gráfica usando círculos ou elipses

Notações Importantes

- $\in$: pertence (elemento pertence ao conjunto)
- $\notin$: não pertence
- $\subset$: está contido (subconjunto próprio)
- $\subseteq$: está contido ou é igual (subconjunto)
- $\supset$: contém (superconjunto próprio)
- $\supseteq$: contém ou é igual (superconjunto)

- $\emptyset$: conjunto vazio
- $\mathbb{U}$: conjunto universo

1.2.2 Relações entre Elementos e Conjuntos

Relação de Pertinência

A **relação de pertinência** indica se um elemento faz parte de um conjunto:

- Se a é elemento do conjunto A, escrevemos: $a \in A$
- Se a não é elemento do conjunto A, escrevemos: $a \notin A$

Exemplo de Pertinência

Seja $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (conjunto dos números pares de 2 a 10).

- $4 \in A$ (4 pertence ao conjunto A)
- $5 \notin A$ (5 não pertence ao conjunto A)
- $8 \in A$ (8 pertence ao conjunto A)
- $9 \notin A$ (9 não pertence ao conjunto A)

1.2.3 Relações entre Conjuntos

Relação de Inclusão

Subconjunto: $A \subseteq B$ significa que todo elemento de A também pertence a B.
Subconjunto próprio: $A \subset B$ significa que $A \subseteq B$ e $A \neq B$.
Igualdade: $A = B$ significa que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Exemplo de Inclusão

Sejam:

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $C = \{2, 4, 6\}$

Temos:

- $A \subset B$ (A é subconjunto próprio de B)
- $A \not\subset C$ (A não é subconjunto de C)
- $\{2\} \subset A$ (o conjunto 2 é subconjunto de A)

1.2.4 Operações entre Conjuntos

Operações Fundamentais

União: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$
Interseção: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$
Diferença: $A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$
Complementar: $A^c = \{x \in \mathbb{U} | x \notin A\}$

Exemplo de Operações

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$.
União: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Interseção: $A \cap B = \{3, 4\}$
Diferença: $A - B = \{1, 2\}$ e $B - A = \{5, 6\}$
Se $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, então:
Complementar: $A^c = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

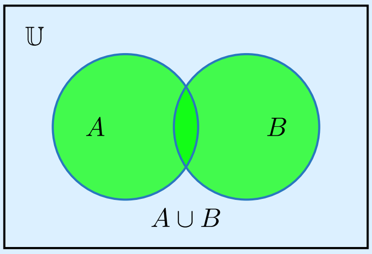
1.2.5 Diagramas de Venn

Representação Gráfica

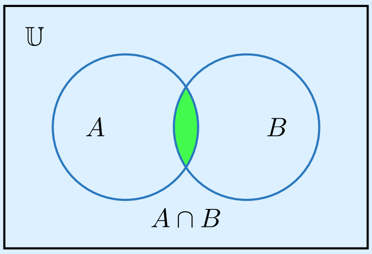
Os **diagramas de Venn** são representações gráficas que facilitam a visualização das relações e operações entre conjuntos. Cada conjunto é representado por uma região (geralmente circular) dentro de um retângulo que representa o conjunto universo.

Diagramas de Venn - Operações Básicas

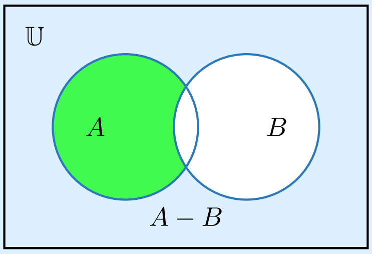
1. União ($A \cup B$):



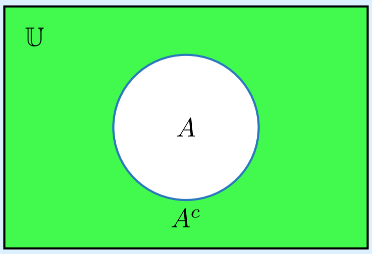
2. Interseção ($A \cap B$):



3. Diferença ($A - B$):



4. Complementar (A^c):



1.2.6 Resolução de Problemas com Diagramas de Venn

Estratégias de Resolução

Para resolver problemas envolvendo diagramas de Venn:

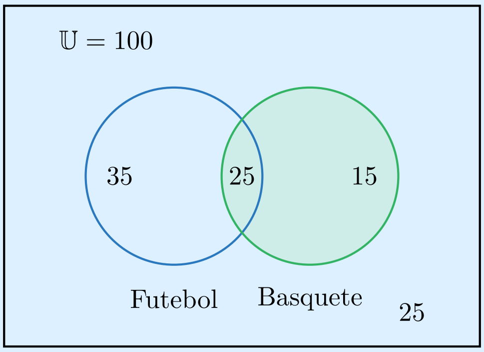
1. Identifique os conjuntos envolvidos
2. Determine o conjunto universo
3. Organize as informações dadas
4. Construa o diagrama passo a passo
5. Use as propriedades das operações para encontrar a resposta

Problema Aplicado

Problema: Em uma pesquisa com 100 pessoas sobre preferências esportivas:

- 60 pessoas gostam de futebol
- 40 pessoas gostam de basquete
- 25 pessoas gostam de ambos os esportes
- Quantas pessoas não gostam de nenhum dos dois esportes?

Solução usando Diagrama de Venn:



Cálculos:

- Só futebol: $60 - 25 = 35$
- Só basquete: $40 - 25 = 15$
- Ambos: 25
- Nenhum dos dois: $100 - (35 + 25 + 15) = 25$

Resposta: 25 pessoas não gostam de nenhum dos dois esportes.

Exercícios

1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Determine:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - B$

d) $B - A$

2. Em uma escola com 200 alunos, 120 estudam inglês, 80 estudam francês e 50 estudam ambas as línguas. Quantos alunos não estudam nenhuma dessas línguas?

3. Construa diagramas de Venn para representar:

a) $(A \cup B) \cap C$

b) $A \cap (B \cup C)$

c) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. Prove que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Lei de De Morgan) usando diagramas de Venn.

1.3 Probabilidades

A **probabilidade** é o ramo da Matemática que estuda o grau de **chance** ou **possibilidade** de que um evento ocorra em uma situação incerta, ou seja, em experimentos onde o resultado não pode ser previsto com certeza.

Definição Simples

A probabilidade de um evento é um número entre **0** e **1** (ou entre 0% e 100%), que indica a **chance de ocorrer**:

- **0** ou 0%: Evento **impossível** (ex.: sair 7 em um dado comum de 6 faces).
- **0,5** ou 50%: Chance igual (ex.: sair cara ou coroa em uma moeda justa).
- **1** ou 100%: Evento **certo** (ex.: sair um número menor ou igual a 6 em um dado comum).

1.3.1 Conceitos Fundamentais

Experimento (ou experiência): Um processo que produz um resultado observável. Pode ser lançar uma moeda, jogar um dado, sortear uma carta, etc.

Experimento Aleatório: Quando o resultado não pode ser previsto com certeza, mesmo que o experimento seja repetido em condições idênticas. (ex.: Joga-se uma moeda ao ar.

- Esse é um **experimento**, pois gera um resultado observável.
- O resultado não pode ser previsto com certeza antes do lançamento.

Espaço amostral:

$$\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$$

- Cada lançamento pode gerar resultados diferentes.
- Mesmo que a moeda seja lançada da mesma forma várias vezes, o resultado pode variar.

Espaço Amostral (Ω): Conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. (ex.: Lança-se um dado comum de 6 faces, numeradas de 1 a 6.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Cada número representa um resultado possível.
- O espaço amostral inclui **todos** os resultados que podem ocorrer.)

Evento ou (ocorrência) : Qualquer subconjunto do espaço amostral, ou seja, um ou mais resultados possíveis. Pode ser:

- **Evento simples:** um único resultado (ex.: sair 5 no dado).
- **Evento composto:** dois ou mais resultados (ex.: sair número par no dado).
- **Evento certo:** ocorre sempre ou ainda é sempre igual ao espaço amostral (Ω) podemos assim dizer (ex.: Sair um número menor que 7 ao lançar um dado comum).
- **Evento impossível:** nunca ocorre (conjunto vazio).

Eventos Mutuamente Exclusivos: Eventos que não podem ocorrer juntos (ex.: sair cara e coroa em uma jogada de moeda).

Eventos Complementares: Dois eventos que juntos formam o espaço amostral. Um ocorre se, e somente se, o outro não ocorre. (ex.: Lançar um dado e observar o número.

- Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Evento A: "Sair número par"

$$A = \{2, 4, 6\}$$

- Evento complementar $\overline{\mathrm{A}}$: "Não sair número par"(ou seja, sair número ímpar)

$$\overline{\mathrm{A}} = \{1, 3, 5\}$$

Verificações:

- $A \cup \overline{\mathrm{A}} = \Omega$
- $A \cap \overline{\mathrm{A}} = \emptyset$
- $P(\mathrm{A}) + P(\overline{\mathrm{A}}) = 1$).

Eventos Independentes: A ocorrência de um não altera a probabilidade do outro. (ex.:Lança-se uma moeda e, ao mesmo tempo, joga-se um dado.

- Evento A: sair **cara** na moeda
- Evento B: sair **6** no dado

A moeda possui dois resultados possíveis: *cara* ou *coroa*, enquanto o dado possui seis: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Note que o resultado da moeda **não influencia** o resultado do dado e vice-versa. Assim, os eventos são **independentes**.)

1.3.2 Como calcular a Probabilidade

Fórmula Básica

$$P(E) = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número total de casos possíveis}}$$

Onde:

- $P(E)$ é a probabilidade do evento E.
- Casos favoráveis são os resultados que fazem o evento acontecer.
- Casos possíveis são todos os resultados possíveis do experimento.

Exemplo: Probabilidade de sair "cara"

Problema: Qual a probabilidade de sair "cara" ao lançar uma moeda justa?

1. **Experimento:** Lançar uma moeda é um **experimento aleatório**, pois não podemos prever com certeza se sairá "cara" ou "coroa".
2. **Espaço amostral:**
$$\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$$
3. **Evento desejado:** Queremos saber a probabilidade de sair "cara".
$$E = \{\text{cara}\}$$
Casos favoráveis: 1 **Casos possíveis:** 2
4. **Aplicando a fórmula da probabilidade:**
$$P(E) = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}} = \frac{1}{2}$$
$$P(E) = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$
5. A probabilidade de sair "cara" é:
$$\boxed{P(\text{cara}) = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%}$$

Exemplo: Dados e Moedas

1. Jogar um dado comum de 6 faces numeradas de 1 a 6. Calcular:
   - A probabilidade de sair o número 3
   - A probabilidade de sair um número par

   Resolução:
   Espaço amostral:

   $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad \text{Número total de casos possíveis} = 6$$

   (a) **Probabilidade de sair o número 3:**
   O número 3 aparece apenas uma vez no espaço amostral, logo:

   $$\text{Casos favoráveis} = \{3\} \Rightarrow 1 \text{ caso}$$

   Aplicando a fórmula da probabilidade:

   $$P(3) = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667 \Rightarrow 16{,}67\%$$

   (b) **Probabilidade de sair um número par:**
   Os números pares entre 1 e 6 são: $2, 4, 6$

   $$\text{Casos favoráveis} = \{2, 4, 6\} \Rightarrow 3 \text{ casos}$$

   Então:

   $$P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

2. Jogar duas moedas simultaneamente:
   - Espaço amostral: $\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$, onde C = cara, K = coroa.
   - **Probabilidade de sair duas caras:**

   $$P(\text{duas caras}) = \frac{1}{4} = 25\%$$

   - **Probabilidade de sair pelo menos uma coroa (uma ou mais coroas):**

   $$P(\geq 1 \text{ coroa}) = \frac{3}{4} = 75\%$$

1.3.3 Probabilidade Condicional

A probabilidade condicional indica a chance de um evento ocorrer, sabendo que outro evento já ocorreu.

Probabilidade Condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Lê-se: "Probabilidade de A dado que B ocorreu".

Exemplo: Urna com bolas

Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 2 bolas azuis. Retira-se duas bolas, sem reposição.

(a) **Probabilidade da 1ł bola ser vermelha:**
No total há 5 bolas na urna (3 vermelhas + 2 azuis). A chance de tirar uma vermelha na primeira retirada é:

$$P(V_1) = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$$

(b) **Probabilidade da 2ł bola ser vermelha, sabendo que a 1ł foi vermelha:**

Como não há reposição, restam agora apenas 4 bolas (2 vermelhas e 2 azuis). A probabilidade de tirar outra vermelha na segunda retirada, dado que a primeira já foi vermelha, é:

$$P(V_2|V_1) = \frac{2}{4} = 0{,}5 = 50\%$$

(c) **Probabilidade de as duas bolas retiradas serem vermelhas:**

Como o segundo evento depende do primeiro, usamos a **probabilidade condicional**:

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2|V_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$$

Isso significa que há 30% de chance de retirar duas bolas vermelhas consecutivamente, sem reposição.

1.3.4 Regras das Probabilidades (Interseção e União)

Regra do "E"(Interseção)

Para eventos em sequência ou simultâneos, a probabilidade de ocorrerem juntos (ambos) é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

Se A e B são independentes, $P(B|A) = P(B)$, então:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Regra do "OU"(União)

A probabilidade de ocorrer A ou B (ou ambos) é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Para eventos mutuamente exclusivos, $P(A \cap B) = 0$, logo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemplo: Regra do "E" e do "OU"

Em uma sala com 50 pessoas, temos:

- 20 homens
- 30 mulheres
- 10 homens usam óculos
- 20 mulheres usam óculos

(a) **Probabilidade de ser mulher *e* usar óculos:**

- Total de mulheres que usam óculos: 20
- Total de pessoas: 50

$$P(\text{mulher e usa óculos}) = \frac{20}{50} = 0{,}4 = 40\%$$

(b) **Probabilidade de ser homem *ou* usar óculos:**
Para aplicar a regra do "OU" (adição), usamos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Onde:

- $P(\text{homem}) = \dfrac{20}{50}$
- $P(\text{usa óculos}) = \dfrac{10+20}{50} = \dfrac{30}{50}$
- $P(\text{homem e usa óculos}) = \dfrac{10}{50}$

$$P(\text{homem ou usa óculos}) = \frac{20}{50} + \frac{30}{50} - \frac{10}{50} = \frac{40}{50} = 0{,}8 = 80\%$$

Exercícios

1. Joga-se um dado duas vezes. Qual a probabilidade de:

   (a) Sair 6 nos dois lançamentos?
   (b) A soma dos números sair 10?

   Solução:

   (a) **Sair 6 nos dois lançamentos**
   O dado tem 6 faces, com números de 1 a 6. Como são dois lançamentos, o espaço amostral total é:

   $$\Omega = 6 \times 6 = 36 \text{ possibilidades}$$

   Para que os dois resultados sejam 6, temos apenas um caso favorável: (6,6).

   $$P = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}} = \frac{1}{36} \approx 2{,}78\%$$

   (b) **A soma dos números ser 10**
   Vamos listar os pares ordenados cujas somas resultam em 10:

   $$(4,6),\\ (5,5),\\ (6,4).$$

   São 3 combinações possíveis dentre as 36.

   $$P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 8{,}33\%$$

2. Numa caixa com 5 canetas boas e 3 defeituosas, retiram-se 2 canetas. Qual a chance de:

   (a) Ambas serem boas?
   (b) Pelo menos uma ser defeituosa?

   Solução:

   (a) **Ambas serem boas**
   No total, temos:

   $$\text{Total de canetas} = 5 \text{ boas} + 3 \text{ defeituosas} = 8$$

   A retirada é feita sem reposição, ou seja, após tirar a primeira caneta, ela não retorna para a caixa.

   - A chance de a **primeira** caneta ser boa: $\dfrac{5}{8}$

- A chance de a **segunda** ser boa (após já ter tirado uma boa): $\frac{4}{7}$

Multiplicamos as probabilidades:

$$P = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 35{,}71\%$$

(b) **Pelo menos uma ser defeituosa**
Aqui usamos o complemento da probabilidade de ambas serem boas.

$$P(\text{pelo menos uma defeituosa}) = 1 - P(\text{ambas boas})$$

$$P = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14} \approx 64{,}29\%$$

1.4 Expressões Numéricas

As **expressões numéricas** são sentenças matemáticas formadas por números, operações e parênteses que representam um **cálculo a ser realizado**. Resolver uma expressão numérica significa realizar as operações respeitando uma **ordem correta**.

Definição de Expressão Numérica

Uma **expressão numérica** é uma sequência organizada de números e operações que devem ser resolvidas seguindo a ordem estabelecida pelas regras da Matemática.

Exemplos de Expressões Numéricas

- $3 + 4 \times 2$
- $(8 - 5)^2$
- $12 \div (2 + 1)$
- $3 + [2 \times (4 + 1)]$

1.4.1 Ordem das Operações

Ordem das Operações

Para resolver corretamente uma expressão numérica, é necessário seguir a seguinte **ordem de prioridade**:

1. Parênteses **( )**, colchetes [ ] e chaves **{ }** de dentro para fora
2. Potências e raízes
3. Multiplicações e divisões da esquerda para a direita
4. Adições e subtrações da esquerda para a direita

Exemplo 1

Resolva: $3 + 4 \times 2$
Solução:

$$\begin{aligned} 3 + 4 \times 2 &= 3 + 8 \quad \text{(Multiplicação primeiro)} \\ &= 11 \end{aligned}$$

Exemplo 2

Resolva: $10 - 6 \div 2 + 3$
Solução:

$$\begin{aligned} 10 - 6 \div 2 + 3 &= 10 - 3 + 3 \quad \text{(Divisão)} \\ &= 7 + 3 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Exemplo 3

Resolva: $2 \times (3 + 4)^2$
Solução:

$$\begin{aligned} 2 \times (3 + 4)^2 &= 2 \times 7^2 \quad \text{(Parênteses)} \\ &= 2 \times 49 \quad \text{(Potência)} \\ &= 98 \end{aligned}$$

Exemplo 4

Resolva: $3 + [2 \times (5-1)^2]$

Solução:

$$\begin{aligned} 3 + [2 \times (5-1)^2] &= 3 + [2 \times 4^2] \\ &= 3 + [2 \times 16] \\ &= 3 + 32 \\ &= 35 \end{aligned}$$

Exemplo 5

Resolva x

$$\begin{aligned} \left\{\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)\times\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{3}\right\} &= \left\{\left[\left(\frac{9}{12}+\frac{10}{12}\right)\times\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{3}\right\} \\ &= \left\{\left(\frac{19}{12}\times\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\right\} \\ &= \left\{\frac{19}{24}+\frac{8}{24}\right\} \\ &= \frac{27}{24} \\ &= 1\frac{3}{24} = 1\frac{1}{8} \end{aligned}$$

1.4.2 Erros Comuns

Atenção!

Um erro comum é realizar as operações da esquerda para a direita sem respeitar a hierarquia de operações. Sempre siga a ordem correta:

- Multiplicação antes da adição
- Parênteses antes de tudo
- Potências antes de multiplicações

1.4.3 Expressões com Frações e Potências

Expressões com Frações

Para resolver expressões numéricas com frações, aplique as mesmas regras de ordem de operações, lembrando:

- Priorize os parênteses
- Respeite a hierarquia entre potência, multiplicação/divisão e soma/subtração
- Cuidado com o uso correto das frações ao somar ou subtrair (mesmo denominador)

Exemplo com Frações

Resolva: $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\left(2+\frac{1}{2}\right)$

Solução:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \left(\frac{5}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{15}{8} \\
&= \frac{4}{8} + \frac{15}{8} = \frac{19}{8}
\end{aligned}
$$

Expressões com Potências

As potências sempre devem ser resolvidas **antes** das multiplicações e somas. Quando há potências com frações, resolve-se a fração primeiro (se necessário) e depois aplica-se o expoente.

Exemplo com Potência

Resolva: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$
Solução:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} \\
\Rightarrow \frac{9}{4} + \frac{1}{4} &= \frac{10}{4} = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo

Resolva: $\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$
Solução:

$$
\begin{aligned}
2 + \frac{1}{2} &= \frac{5}{2} \\
\left(\frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} \\
\Rightarrow \frac{25}{4} - \frac{5}{4} &= \frac{20}{4} = 5
\end{aligned}
$$

1.5 Potenciação e Radiciação

1.5.1 Potenciação

Conceito

A potenciação é uma operação matemática fundamental que simplifica a representação de multiplicações repetidas de um mesmo número.
Por exemplo, em vez de escrever $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, pode-se usar a potenciação para representar isso de forma mais simples, resumida e curta: 2^5.

Estrutura de uma Potência

Quando temos a^n:

- **a** é a **base** (o número que está sendo multiplicado)
- **n** é o **expoente** (quantas vezes a base é multiplicada por si mesma)

Lê-se: "a elevado a n"ou "a elevado à n-ésima potência"

Exemplos Básicos

1. $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
2. $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
3. $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$
4. $5^2 = 5 \times 5 = 25$

Casos Especiais

Casos Especiais da Potenciação

a) Expoente zero: Qualquer número elevado a zero é igual a 1, exceto quando a base é zero.

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

Exemplos: $5^0 = 1$; $(-21)^0 = 1$
b) Expoente 1: Qualquer número elevado a 1 é igual a ele próprio.

$$a^1 = a$$

Exemplos: $7^1 = 7$; $(-3)^1 = -3$
c) Base 0: Zero elevado a qualquer expoente positivo é 0. Zero elevado a zero (0^0) é uma indeterminação.

$$0^n = 0 \quad (n > 0)$$

Exemplo: $0^4 = 0$
d) Base 1: Um elevado a qualquer expoente é 1.

$$1^n = 1$$

Exemplo: $1^{10} = 1$

1.5.2 Propriedades da Potenciação

As propriedades da potenciação são regras que simplificam cálculos com potências.

Produto de Potências com a Mesma Base

Para multiplicar potências com a mesma base, mantemos a base e somamos os expoentes.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Exemplos: Produto de Potências

1. $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
2. $5^2 \times 5^3 = 5^{2+3} = 5^5 = 3125$
3. $x^4 \times x^2 = x^{4+2} = x^6$

Quociente de Potências com a Mesma Base

Para dividir potências com a mesma base, mantemos a base e subtraímos os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

Exemplos: Quociente de Potências

1. $\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3 = 8$
2. $\frac{3^7}{3^3} = 3^{7-3} = 3^4 = 81$
3. $\frac{x^6}{x^2} = x^{6-2} = x^4$

Potência de Potência

Para elevar uma potência a outro expoente, mantemos a base e multiplicamos os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Exemplos: Potência de Potência

1. $(2^3)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12} = 4096$
2. $(5^2)^3 = 5^{2\times 3} = 5^6 = 15625$
3. $(x^4)^2 = x^{4\times 2} = x^8$

Potência de um Produto

Para elevar um produto a um expoente, elevamos cada fator ao expoente.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Exemplos: Potência de um Produto

1. $(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4 = 16 \times 81 = 1296$
2. $(xy)^3 = x^3 \times y^3$
3. $(5a)^2 = 5^2 \times a^2 = 25a^2$

Potência de um Quociente

Para elevar um quociente (fração) a um expoente, elevamos o numerador e o denominador ao expoente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

Exemplos: Potência de um Quociente

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$
2. $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$
3. $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1^2}{5^2} = \frac{1}{25}$

Expoente Negativo

Uma base elevada a um expoente negativo é igual ao inverso da base elevada ao expoente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

Exemplos: Expoente Negativo

1. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
2. $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
3. $\frac{1}{x^{-4}} = x^4$

1.5.3 Aplicações da Potenciação

A potenciação não é apenas um conceito matemático abstrato; ela tem aplicações práticas em diversas áreas do nosso dia a dia.

Geometria

a) Área de um Quadrado
Se um quadrado tem lado l, a sua área é:

$$\text{Área} = l \times l = l^2$$

Exemplo: Um quadrado com lado de 5 cm tem área $5^2 = 25$ cm^2.
b) Volume de um Cubo
Se um cubo tem aresta a, o seu volume é:

$$\text{Volume} = a \times a \times a = a^3$$

Exemplo: Um cubo com aresta de 3 cm tem volume $3^3 = 27$ cm^3.

Crescimento e Decaimento

a) Crescimento Populacional
Se uma população cresce a uma taxa percentual constante, a população futura é calculada usando:

$$P_f = P_i \times (1 + r)^t$$

onde P_i é a população inicial, r é a taxa de crescimento e t é o tempo.
b) Juros Compostos
O montante final com juros compostos é:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

onde C é o capital inicial, i é a taxa de juros e t é o tempo.

Informática e Tecnologia

a) Armazenamento de Dados
A capacidade de armazenamento é expressa em potências de 2:

- 1 KB = 2^{10} bytes = 1024 bytes
- 1 MB = 2^{20} bytes = 1,048,576 bytes
- 1 GB = 2^{30} bytes = 1,073,741,824 bytes

b) Endereçamento de Memória
Um processador de 32 bits pode acessar $2^{32} = 4,294,967,296$ endereços diferentes.

Notação Científica

A potenciação com base 10 é essencial para representar números muito grandes ou muito pequenos:
a) Distâncias Astronômicas: A distância da Terra ao Sol é aproximadamente $1,5 \times 10^8$ km.
b) Tamanhos Atômicos: O diâmetro de um átomo de hidrogênio é cerca de $1,06 \times 10^{-10}$ metros.

1.5.4 Radiciação

Conceito

A radiciação é uma operação matemática que representa o inverso da potenciação. Enquanto a potenciação nos diz o resultado de multiplicar um número por si mesmo várias vezes (a^n), a radiciação procura qual número, multiplicado por si mesmo "um certo número de vezes", resulta num valor dado.
A radiciação é representada pelo símbolo $\sqrt{}$.

Estrutura de um Radical

Numa expressão como $\sqrt[n]{a^m} = x$:

- $\sqrt{}$ é o **radical** (o símbolo da raiz)
- **n** é o **índice da raiz** (indica quantas vezes o número x deve ser multiplicado por si mesmo para obter a)
- $\mathbf{a^m}$ é o **radicando** (o número do qual queremos extrair a raiz)
- **x** é a **raiz** (o resultado da operação)

Observação: Se o índice não for escrito, assume-se que é 2 (raiz quadrada).

Condições de Existência

- **Índice Par:** Se n é par, o radicando a deve ser não negativo ($a \geq 0$) para que a raiz seja um número real.
  Exemplo: $\sqrt{-4}$ não tem solução real, pois $(-2) \times (-2) = 4 \neq -4$.
- **Índice Ímpar:** Se n é ímpar, o radicando a pode ser qualquer número real (positivo ou negativo).
  Exemplo: $\sqrt[3]{-27} = -3$, pois $(-3) \times (-3) \times (-3) = -27$.

Exercícios

1. Calcule o quadrado e a raiz quadrada dos exercícios abaixo:

a) $\sqrt{121}$

b) 7^2

c) 9^2

d) $\sqrt{64}$

e) $\sqrt{25}$

2. Resolva os problemas:

a) Se um quadrado tem área igual a 36 cm^2, quanto mede o lado desse quadrado?

b) Quanto mede o lado de um quadrado com área igual a 9 cm^2?

1.5.5 Relação entre Radiciação e Potenciação

Operações Inversas

A radiciação e a potenciação são operações inversas e estão intrinsecamente ligadas. Qualquer raiz pode ser escrita como uma potência com expoente fracionário.

Relação Fundamental

A relação é definida por:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

onde $a > 0$ se n é par.

Exemplos de Conversão

1. $\sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$
2. $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$
3. $\sqrt[4]{x^2} = x^{\frac{2}{4}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$
4. $\sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}} = 2$

1.5.6 Propriedades da Radiciação

As propriedades da radiciação surgem diretamente das propriedades da potenciação e permitem simplificar expressões com radicais.

Raiz de um Produto

A raiz de um produto é igual ao produto das raízes dos fatores.

$$\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$$

Exemplo: Raiz de um Produto

$$\sqrt{36 \times 4} = \sqrt{36} \times \sqrt{4} = 6 \times 2 = 12$$

Verificação: $\sqrt{144} = 12$

Raiz de um Quociente

A raiz de um quociente é igual ao quociente das raízes do numerador e do denominador.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

Exemplo: Raiz de um Quociente

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$$

Raiz de uma Potência

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Exemplo: Raiz de uma Potência

$$\sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$$

Raiz de Raiz

Para calcular a raiz de uma raiz, multiplicam-se os índices.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$$

Exemplo: Raiz de Raiz

$$\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[3 \times 2]{8} = \sqrt[6]{8}$$

1.5.7 Técnicas de Simplificação de Raízes

Fatoração do Radicando

Decompor o radicando em fatores primos ou em fatores que sejam potências cujo expoente é múltiplo do índice da raiz.

Simplificação por Fatoração

Se $a = b^n \times c$, então:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \times c} = b\sqrt[n]{c}$$

Exemplo: Simplificação por Fatoração

Simplificar $\sqrt{72}$:
Solução:

$$72 = 36 \times 2 = 6^2 \times 2$$
$$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

1.5.8 Racionalização de Denominadores

O que é Racionalização?

Racionalização é o processo de remover radicais do denominador de uma fração, multiplicando o numerador e o denominador por um fator que elimine a raiz do denominador.

Racionalização Simples

Para racionalizar $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b}} \times \frac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$$

Exemplo: Racionalização Simples

Racionalizar $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

Solução:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Racionalização com Binômios

Para racionalizar denominadores com binômios contendo raízes, usamos o conjugado do denominador. O conjugado de $a + b\sqrt{c}$ é $a - b\sqrt{c}$. O conjugado de $a - b\sqrt{c}$ é $a + b\sqrt{c}$.

Passos para Racionalizar com Conjugado

1ž. Identificar o conjugado do denominador
2ž. Multiplicar numerador e denominador pelo conjugado
3ž. Desenvolver o denominador usando o produto notável: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4ž. Desenvolver o numerador
5ž. Simplificar a fração (se possível)

Exemplo: Racionalização com Conjugado

Racionalizar $\frac{2}{2+\sqrt{5}}$:

Solução:

$$\frac{2}{2+\sqrt{5}} = \frac{2}{2+\sqrt{5}} \times \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} \tag{1.1}$$
$$= \frac{2(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} \tag{1.2}$$
$$= \frac{4-2\sqrt{5}}{4-5} \tag{1.3}$$
$$= \frac{4-2\sqrt{5}}{-1} \tag{1.4}$$
$$= -4 + 2\sqrt{5} \tag{1.5}$$

Exercícios

1. Simplifique as seguintes raízes:

a) $\sqrt{50}$

b) $\sqrt{98}$

c) $\sqrt[3]{54}$

d) $\sqrt{200}$

2. Racionalize os denominadores:

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

c) $\frac{4}{3+\sqrt{2}}$

d) $\frac{1}{1-\sqrt{3}}$

3. Calcule:

a) $\sqrt{16}+\sqrt{25}$

b) $\sqrt{36}-\sqrt{9}$

c) $\sqrt{49}\times\sqrt{4}$

d) $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}$

4. Resolva as equações:

a) $\sqrt{x}=7$

b) $\sqrt{2x+1}=5$

c) $\sqrt[3]{x-2}=3$

d) $\sqrt{x^2}=8$

1.5.9 Operações com Radicais

Adição e Subtração de Radicais

Só é possível somar ou subtrair radicais semelhantes (mesmo índice e mesmo radicando).
Para radicais não semelhantes, deve-se primeiro simplificá-los para verificar se podem ser reduzidos a radicais semelhantes.

Regra para Adição e Subtração

$$a\sqrt[n]{c}+b\sqrt[n]{c}=(a+b)\sqrt[n]{c}$$
$$a\sqrt[n]{c}-b\sqrt[n]{c}=(a-b)\sqrt[n]{c}$$

Exemplos: Adição e Subtração de Radicais

1. $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=(3+5)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$
2. $7\sqrt{3}-2\sqrt{3}=(7-2)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$
3. $\sqrt{18}+\sqrt{8}$:

$$\sqrt{18}=\sqrt{9\times 2}=3\sqrt{2}$$
$$\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{18}+\sqrt{8}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

Multiplicação de Radicais

A multiplicação de radicais pode ser feita de duas formas:

- Radicais com mesmo índice: multiplica-se os radicandos
- Radicais com índices diferentes: converte-se para potências fracionárias

Multiplicação de Radicais

Mesmo índice:

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$$

Índices diferentes:

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{m}}\times b^{\frac{1}{n}}$$

Exemplos: Multiplicação de Radicais

1. $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$
2. $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4 \times 2} = \sqrt[3]{8} = 2$
3. $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{10}$

1.5.10 Equações com Radicais

Resolução de Equações com Radicais

Para resolver equações envolvendo radicais, geralmente isolamos o radical e elevamos ambos os membros da equação a uma potência que elimine o radical.
Atenção: Sempre verificar as soluções encontradas na equação original, pois podem aparecer soluções estranhas.

Método de Resolução

1. Isolar o radical em um dos membros da equação
2. Elevar ambos os membros à potência adequada
3. Resolver a equação resultante
4. Verificar as soluções na equação original

Exemplo: Equação com Radical

Resolver $\sqrt{x+3} = 5$:
Solução:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= 5 \\ (\sqrt{x+3})^2 &= 5^2 \\ x+3 &= 25 \\ x &= 22 \end{aligned}$$

Verificação: $\sqrt{22+3} = \sqrt{25} = 5$
Resposta: $x = 22$

Exemplo: Equação com Dois Radicais

Resolver $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}$:
Solução:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= \sqrt{2x-3} \\ (\sqrt{x+1})^2 &= (\sqrt{2x-3})^2 \\ x+1 &= 2x-3 \\ 1+3 &= 2x-x \\ 4 &= x \end{aligned}$$

Verificação:

$$\begin{aligned} \sqrt{4+1} &= \sqrt{5} \\ \sqrt{2(4)-3} &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Como $\sqrt{5} = \sqrt{5}$
Resposta: $x = 4$

1.5.11 Expoentes Fracionários e Radicais

Equivalência entre Radicais e Potências

Todo radical pode ser expresso como uma potência com expoente fracionário, e vice-versa. Esta equivalência é fundamental para simplificar expressões complexas.

Conversões Fundamentais

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Exemplos: Conversões

1. $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$
3. $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$
4. $16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$

Exercícios

Potenciação - Nível Básico

1. Calcule:

a) 2^4

b) $(-3)^3$

c) 5^0

d) $(-2)^4$

e) 10^{-2}

2. Simplifique usando as propriedades da potenciação:

a) $3^5 \times 3^2$

b) $\frac{2^8}{2^3}$

c) $(4^2)^3$

d) $(2 \times 5)^3$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$

3. Escreva na forma de uma só potência:

a) $x^3 \times x^4 \times x^2$

b) $\frac{y^6}{y^2}$

c) $(z^3)^4$

d) $\frac{a^5 \times a^3}{a^2}$

Exercícios

Radiciação - Nível Básico

1. Calcule:

a) $\sqrt{49}$

b) $\sqrt[3]{27}$

c) $\sqrt{100}$

d) $\sqrt[4]{16}$

e) $\sqrt[3]{-8}$

2. Simplifique:

a) $\sqrt{32}$

b) $\sqrt{75}$

c) $\sqrt[3]{24}$

d) $\sqrt{48}$

3. Racionalize:

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{5}{\sqrt{10}}$

c) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

d) $\frac{3}{1-\sqrt{2}}$

Exercícios

Problemas de Aplicação

1. Um quadrado tem área de 144 cm^2. Qual é o perímetro deste quadrado?
2. Um cubo tem volume de 216 cm^3. Qual é a área total deste cubo?
3. Uma população de bactérias dobra a cada hora. Se inicialmente há 100 bactérias, quantas haverá após 5 horas?
4. Um capital de R$ 1.000,00 é aplicado a juros compostos de 5% ao mês. Qual será o montante após 3 meses?
5. A distância entre duas cidades é de $3,6 \times 10^5$ metros. Expresse essa distância em quilômetros.

Exercícios

Exercícios de Exames de Admissão

1. O valor de $\frac{2^{10}-2^9}{2^8}$ é:

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

2. Se $\sqrt{x+2} = 4$, então x vale:

A) 12

B) 14

C) 16

D) 18

3. O valor de $8^{\frac{2}{3}}$ é:

A) 2

B) 4

C) 6

D) 8

4. A expressão $\sqrt{50} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$ simplificada é:

A) $7\sqrt{2}$

B) $6\sqrt{2}$

C) $5\sqrt{2}$

D) $4\sqrt{2}$

5. Se $2^x = 32$, então x vale:

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

1.6 Função do primeiro grau

Analogia da Máquina

Imagine que você tem uma máquina que recebe um número, faz uma conta simples com ele e devolve outro número. Essa **máquina** no mundo da matemática é uma **função**.
Uma **Função do** $1°$ **Grau** (ou Função Afim) é uma relação matemática onde, para cada valor que você "coloca"(chamamos de x), você obtém um único valor "de saída"(chamamos de y ou $f(x)$). A característica principal é que o x (a variável independente) aparece sempre com expoente 1.

Definição da Função do $1°$ Grau

Uma função do $1°$ grau é expressa pela forma:

$$f(x) = ax + b$$

Onde:

- **x**: é a variável independente (o valor que você coloca na função)
- **f(x)** ou **y**: é a variável dependente (o valor que a função devolve)
- **a**: é o coeficiente angular (ou declive). Determina a inclinação da recta:
  - Se $a > 0$, a função é crescente (a linha sobe)
  - Se $a < 0$, a função é decrescente (a linha desce)
  - Se $a = 0$, a função é constante (a linha é horizontal)
- **b**: é o coeficiente linear (ou ordenada na origem)

Exemplo 1: Função Crescente

Função: $f(x) = 2x + 3$
Análise:

- $a = 2$ (a função é crescente)
- $b = 3$ (a linha cruza o eixo y no ponto 3)

Calculando alguns valores:

$$f(1) = 2(1) + 3 = 5$$
$$f(0) = 2(0) + 3 = 3$$
$$f(-1) = 2(-1) + 3 = 1$$

Exemplo 2: Função Linear

Função: $k(x) = x + 4$
Análise:

- $a = 1$ (a função é crescente)
- $b = 4$ (a linha cruza o eixo y no ponto 4)

Calculando alguns valores:

$$k(1) = 1(1) + 4 = 5$$
$$k(0) = 1(0) + 4 = 4$$
$$k(-2) = 1(-2) + 4 = 2$$

Exemplo 3: Função Decrescente

Função: $h(x) = -4x$
Análise:

- $a = -4$ (a função é decrescente)
- $b = 0$ (a linha passa pela origem)

Calculando alguns valores:

$$h(-1) = -4(-1) = 4$$
$$h(0) = -4(0) = 0$$
$$h(1) = -4(1) = -4$$

Exercícios

1. Das funções abaixo, indique quais são funções do 1ž grau:

a) $h(x) = -x + 2$

b) $f(x) = -4x^2 + x$

c) $k(x) = -4x^2 + x + 4x^2$

d) $k(x) = x$

e) $e(x) = -x + 1$

f) $f(x) = 1 - x$

g) $g(x) = -x^3 + 4$

h) $j(x) = -x^4 + x$

i) $k(x) = -3x + 3$

j) $h(x) = 4 - x$

2. Das funções identificadas como do 1° grau no exercício anterior, esboce seus gráficos.

1.6.1 Equação do 1° Grau

Definição

Uma **Equação do** 1° **Grau** é uma igualdade que envolve uma ou mais variáveis (geralmente x), onde o maior expoente da variável é 1. O objetivo é encontrar o valor da variável que torna a igualdade verdadeira.

Forma Geral da Equação do 1ž Grau

$$ax + b = 0$$

onde $a \neq 0$.

Exemplo

Problema: Resolver $2x + 4 = 10$
Solução:

1. **Isolar o termo com x:** Subtrair 4 de ambos os lados:

$$2x = 10 - 4$$

$$2x = 6$$

2. **Isolar o x:** Dividir ambos os lados por 2:

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

Resposta: $\boxed{x = 3}$
Verificação: $2(3) + 4 = 6 + 4 = 10$

Exemplo: Equação com Variáveis dos Dois Lados

Problema: Resolver $2x + 3 = x + 7$
Solução:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= x + 7 \\ 2x - x &= 7 - 3 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Resposta: $\boxed{x = 4}$

Exemplo: Equação com Parênteses

Problema: Resolver $4x + 6(2x + 1) = x + 10 + 2(x - 4)$
Solução:

$$\begin{aligned} 4x + 6(2x + 1) &= x + 10 + 2(x - 4) \\ 4x + 12x + 6 &= x + 10 + 2x - 8 \\ 16x + 6 &= 3x + 2 \\ 16x - 3x &= 2 - 6 \\ 13x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{13} \end{aligned}$$

Resposta: $\boxed{x = -\frac{4}{13}}$

Exercícios

Resolva as seguintes equações:

a) $2x + 2(6x + 1) = 4x + 7 + 3(x - 4)$

b) $4x + \frac{6(2x+1)}{2} = x + 10 + \frac{2(x-4)}{3}$

c) $4x + 3(4x + 8) = x + 10$

d) $4x + 6 = x + 10$

e) $6x + 2(2x - 3) - 2k = x + 10 + 2(x - k)$

1.6.2 Inequação do 1° Grau

Definição

Uma **Inequação do 1° Grau** é semelhante a uma equação, mas em vez de um sinal de igualdade (=), ela usa um sinal de desigualdade ($<, >, \leq, \geq$). O objetivo é encontrar o conjunto de valores da variável que tornam a desigualdade verdadeira.

Sinais de Desigualdade

- $<$: menor que
- $>$: maior que
- $\leq$: menor ou igual a
- $\geq$: maior ou igual a

Regra importante: Ao multiplicar ou dividir uma inequação por um número negativo, o sinal da desigualdade deve ser invertido.

Exemplo

Problema: Resolver $2x + 4 > 10$
Solução:

1. **Isolar o termo com x:**
$$2x > 10 - 4$$
$$2x > 6$$
2. **Isolar o x:**
$$x > \frac{6}{2}$$
$$x > 3$$

Solução: $x \in]3, +\infty[$
A solução é qualquer número x que seja maior que 3.

Exercícios

Resolva as inequações e marque a alternativa correta:
1. Resolver $-5x - 4 \leq -6 - 6x$

A. $x \in [-3; +\infty[$

B. $x \in]-\infty; -1]$

C. $x \in]-\infty; -2]$

D. $x \in]-\infty, -4[$

2. Resolver $-2 + 4x < -4 + 2x$

A. $x \in [-2; +\infty[$

B. $x \in]-\infty; 1]$

C. $x \in]-\infty; -5[$

D. $x \in]-\infty, -1[$

3. Resolver $2x - 5 > 5 - 3x$

A. $x \in]-\infty, 4[$

B. $x \in]-\infty; 3[$

C. $x \in]2; +\infty[$

D. $x \in]6, +\infty[$

1.6.3 Noções de Rectas (Gráfico da Função do 1° Grau)

Representação Gráfica

Quando desenhamos uma função do 1ž grau num gráfico (plano cartesiano), o resultado é sempre uma **recta**.

- O **eixo x** (horizontal) representa os valores de entrada
- O **eixo y** (vertical) representa os valores de saída
- Cada ponto na reta corresponde a um par (x, y) que satisfaz a função

Como Desenhar uma Recta

Para desenhar uma recta, basta encontrar dois pontos que pertençam à recta e ligá-los:

- Um ponto fácil é onde a recta cruza o eixo y: $(0, b)$
- Outro ponto pode ser encontrado atribuindo um valor qualquer para x (por exemplo, $x = 1$) e calculando o y correspondente

1.6.4 Rectas Paralelas e Perpendiculares

Rectas Paralelas

Duas rectas são **paralelas** se tiverem a mesma inclinação (o mesmo coeficiente angular a). Elas nunca se encontram.
Condição: Se $y_1 = a_1x + b_1$ e $y_2 = a_2x + b_2$, então as retas são paralelas se e somente se $a_1 = a_2$.
Exemplo: $y = 2x + 1$ e $y = 2x - 5$ (ambas têm $a = 2$)

Rectas Perpendiculares

Duas rectas são **perpendiculares** se elas se cruzam formando um ângulo de 90 graus.
Condição: O produto dos coeficientes angulares deve ser -1.

$$a_1 \times a_2 = -1 \quad \text{ou} \quad a_2 = -\frac{1}{a_1}$$

Exemplo: $y = 2x + 3$ (onde $a_1 = 2$) e $y = -\frac{1}{2}x + 7$ (onde $a_2 = -\frac{1}{2}$)
Verificação: $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

1.6.5 Equação Geral da Recta

Forma Geral da Recta

A Equação Geral da Recta é uma forma alternativa de representar uma reta no plano cartesiano:

$$Ax + By + C = 0$$

onde A, B e C são números reais, e A e B não são ambos zero.

Conversão entre Formas

De $y = ax + b$ para $Ax + By + C = 0$:
Se temos $y = 2x + 3$:

1. Mover todos os termos para um lado da igualdade:

$$y - 2x - 3 = 0$$

2. Reorganizar:

$$-2x + y - 3 = 0$$

ou

$$2x - y + 3 = 0$$

Aqui, $A = 2$, $B = -1$ e $C = 3$.

Obter o Coeficiente Angular da Forma Geral

Se a recta está na forma $Ax + By + C = 0$, o coeficiente angular é:

$$a = -\frac{A}{B}$$

(desde que $B \neq 0$)

Exercícios

1. Determine se as rectas abaixo são paralelas, perpendiculares ou nem uma nem outra:

a) $y = 3x + 2$ e $y = 3x - 5$

b) $y = 2x + 1$ e $y = -\frac{1}{2}x + 3$

c) $y = x + 4$ e $y = 2x - 1$

2. Converta as seguintes equações para a forma geral:

a) $y = 3x - 2$

b) $y = -\frac{1}{2}x + 5$

c) $y = x$

3. A partir da equação geral $3x - 2y + 6 = 0$, determine:

a) O coeficiente angular

b) O coeficiente linear

c) A equação na forma reduzida $y = ax + b$

1.7 Sistemas de Equações Lineares

1.7.1 Definição de Sistema de Equações Lineares

Um **sistema de equações lineares** é um conjunto de equações lineares que devem ser satisfeitas simultaneamente. É uma ferramenta fundamental para resolver problemas que envolvem múltiplas condições ou restrições.

Definição

Um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas tem a forma geral:

- **Forma geral:**

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

- **Onde:** $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ são coeficientes
- **Incógnitas:** x e y são as variáveis a determinar
- **Solução:** Par ordenado (x_0, y_0) que satisfaz ambas as equações

Sistema Possível e Determinado: Tem uma única solução

- As retas se interceptam num único ponto
- Coeficientes: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

Sistema Possível e Indeterminado: Tem infinitas soluções

- As retas são coincidentes
- Coeficientes: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Sistema Impossível: Não tem solução

- As retas são paralelas (não se interceptam)
- Coeficientes: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

1.7.2 Métodos de Resolução

Principais Métodos

1. **Método da Substituição:**
   - Isolar uma variável numa equação
   - Substituir na outra equação
   - Resolver a equação resultante
   - Encontrar o valor da segunda variável
2. **Método da Adição (Eliminação):**
   - Multiplicar as equações por constantes adequadas
   - Somar as equações para eliminar uma variável
   - Resolver para a variável restante
   - Substituir de volta para encontrar a outra
3. **Método Gráfico:**
   - Representar cada equação como uma reta
   - Encontrar o ponto de intersecção

- As coordenadas do ponto são a solução

4. Regra de Cramer:

- Usar determinantes para resolver
- Aplicável quando o determinante principal 0

1.7.3 Método da Substituição

Exemplo: Método da Substituição

Problema: Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Solução:
Passo 1: Isolar x na segunda equação:

$$x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1$$

Passo 2: Substituir na primeira equação:

$$2(y + 1) + 3y = 7$$

$$2y + 2 + 3y = 7$$
$$5y = 5$$
$$y = 1$$

Passo 3: Encontrar x:

$$x = y + 1 = 1 + 1 = 2$$

Passo 4: Verificação:

- Equação 1: $2(2) + 3(1) = 4 + 3 = 7$
- Equação 2: $2 - 1 = 1$

Resposta: $S = \{(2, 1)\}$

1.7.4 Método da Adição

Exemplo: Método da Adição

Problema: Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$$

Solução:
Estratégia: Eliminar y multiplicando as equações por valores adequados.
Passo 1: Multiplicar a primeira equação por 3 e a segunda por 2:

$$\begin{cases} 9x + 6y = 48 \\ 10x - 6y = 14 \end{cases}$$

Passo 2: Somar as equações:

$$9x + 6y + 10x - 6y = 48 + 14$$
$$19x = 62$$
$$x = \frac{62}{19}$$

Passo 3: Substituir x na primeira equação original:

$$3 \cdot \frac{62}{19} + 2y = 16$$

$$\frac{186}{19} + 2y = 16$$

$$2y = 16 - \frac{186}{19} = \frac{304 - 186}{19} = \frac{118}{19}$$

$$y = \frac{59}{19}$$

Passo 4: Verificação:

- Equação 1: $3 \cdot \frac{62}{19} + 2 \cdot \frac{59}{19} = \frac{186+118}{19} = \frac{304}{19} = 16$
- Equação 2: $5 \cdot \frac{62}{19} - 3 \cdot \frac{59}{19} = \frac{310-177}{19} = \frac{133}{19} = 7$

Resposta: $S = \left\{\left(\frac{62}{19}, \frac{59}{19}\right)\right\}$

1.7.5 Método Gráfico

O método gráfico consiste em representar cada equação do sistema como uma reta no plano cartesiano e encontrar o ponto de intersecção.

Gráfico 1: Sistema com Solução Única

Problema: Resolver graficamente o sistema:

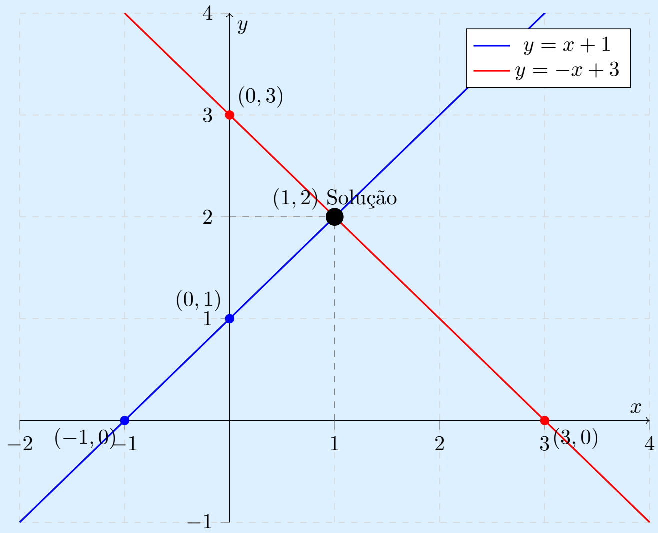
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Análise das retas:
Reta 1: $y = x + 1$

- Coeficiente angular: $m_1 = 1$
- Coeficiente linear: $b_1 = 1$
- Pontos: $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(-1, 0)$

Reta 2: $y = -x + 3$

- Coeficiente angular: $m_2 = -1$
- Coeficiente linear: $b_2 = 3$
- Pontos: $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$



Solução Algébrica para Verificação: Igualando as expressões:

$$x + 1 = -x + 3$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$$y = 1 + 1 = 2$$

Conclusão: $S = \{(1, 2)\}$ - Sistema Possível e Determinado

Gráfico 2: Sistema Impossível

Problema: Analisar graficamente o sistema:

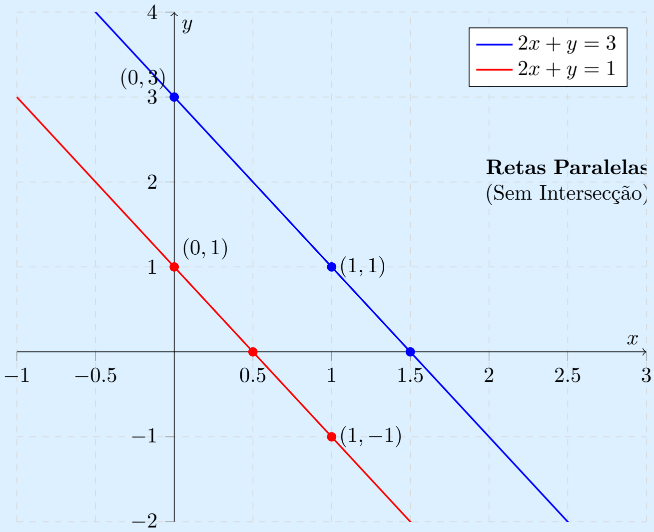
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Reescrevendo na forma $y = mx + b$:

- Reta 1: $y = -2x + 3$
- Reta 2: $y = -2x + 1$

Análise:

- Ambas têm coeficiente angular $m = -2$ (paralelas)
- Coeficientes lineares diferentes: $b_1 = 3$, $b_2 = 1$
- As retas nunca se encontram



Verificação dos Coeficientes:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{2} = 1, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{1} = 3$$

Como $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, o sistema é impossível.
Conclusão: $S = \emptyset$ - Sistema Impossível

Gráfico 3: Sistema Indeterminado

Problema: Analisar graficamente o sistema:

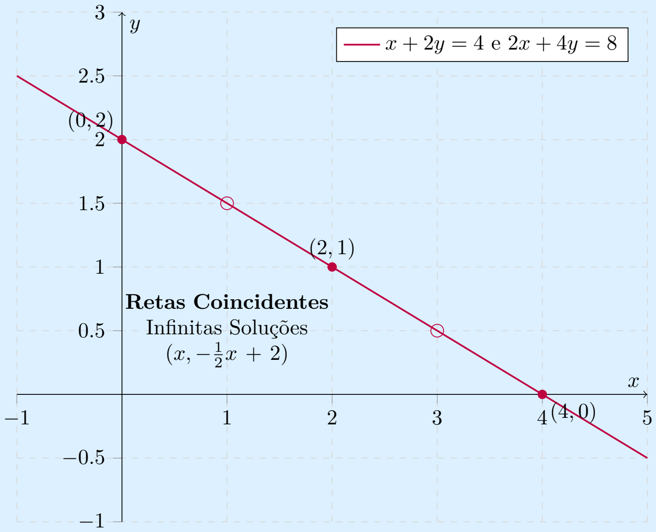
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

Simplificação: A segunda equação é o dobro da primeira:

$$2(x + 2y) = 2(4) \Rightarrow 2x + 4y = 8$$

Reescrevendo na forma $y = mx + b$:

- Reta 1: $y = -\frac{1}{2}x + 2$
- Reta 2: $y = -\frac{1}{2}x + 2$ (idêntica!)



Verificação dos Coeficientes:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Como $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, o sistema é indeterminado.
Conjunto Solução: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 4\}$

1.7.6 Regra de Cramer

Regra de Cramer

Para o sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Determinantes:

- **Principal:** $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$
- **De x:** $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$
- **De y:** $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$

Soluções:

- Se $D \neq 0$: $x = \frac{D_x}{D}$ e $y = \frac{D_y}{D}$ (solução única)
- Se $D = 0$ e $D_x = D_y = 0$: infinitas soluções
- Se $D = 0$ e $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$: sem solução

Exemplo: Regra de Cramer

Problema: Resolva usando a Regra de Cramer:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Solução:
Passo 1: Calcular o determinante principal:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 1(2) = -3 - 2 = -5$$

Passo 2: Calcular D_x:

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7(-1) - 1(2) = -7 - 2 = -9$$

Passo 3: Calcular D_y:

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1) - 1(7) = 3 - 7 = -4$$

Passo 4: Aplicar a regra:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-9}{-5} = \frac{9}{5}$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$$

Verificação:

- Equação 1: $3 \cdot \frac{9}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{27}{5} + \frac{8}{5} = \frac{35}{5} = 7$
- Equação 2: $\frac{9}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1$

Resposta: $S = \left\{\left(\frac{9}{5}, \frac{4}{5}\right)\right\}$

1.7.7 Resolução de Problemas com Sistemas

Estratégias para Problemas

Para resolver problemas usando sistemas de equações:

Passo 1:	Identificar as incógnitas
Passo 2:	Traduzir as condições em equações
Passo 3:	Formar o sistema de equações
Passo 4:	Resolver o sistema
Passo 5:	Verificar e interpretar a solução

Problema 1: Mistura de Líquidos

Problema: Uma farmácia precisa preparar 200ml de uma solução com 30

Solução:
Definindo as variáveis:

- x = volume da solução de 20
- y = volume da solução de 50

Equações:

- Volume total: $x + y = 200$
- Quantidade de álcool: $0,2x + 0,5y = 0,3 \cdot 200 = 60$

Sistema:

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 0,2x + 0,5y = 60 \end{cases}$$

Resolução por substituição: Da primeira equação: $x = 200 - y$
Substituindo na segunda:

$$0,2(200 - y) + 0,5y = 60$$

$$40 - 0,2y + 0,5y = 60$$

$$0,3y = 20$$

$$y = \frac{20}{0,3} = \frac{200}{3} \approx 66,7 \text{ ml}$$

$$x = 200 - \frac{200}{3} = \frac{600 - 200}{3} = \frac{400}{3} \approx 133,3 \text{ ml}$$

Verificação:

- Volume: $133,3 + 66,7 = 200$ ml
- Álcool: $0,2(133,3) + 0,5(66,7) = 26,66 + 33,35 = 60,01 \approx 60$ ml

Resposta: 133,3 ml da solução de 20

Problema 2: Aplicação Financeira

Problema: João investiu um total de 50.000,00 MT em duas aplicações. A primeira rende 5

Solução:
Definindo as variáveis:

- x = valor investido a 5
- y = valor investido a 8

Sistema:

$$\begin{cases} x + y = 50000 \\ 0,05x + 0,08y = 3200 \end{cases}$$

Resolução por adição: Multiplicando a primeira equação por -0,05:

$$\begin{cases} -0,05x - 0,05y = -2500 \\ 0,05x + 0,08y = 3200 \end{cases}$$

Somando as equações:

$$0,03y = 700$$

$$y = \frac{700}{0,03} = \frac{70000}{3} \approx 23333,33$$

$$x = 50000 - 23333,33 = 26666,67$$

Verificação:

- Total: $26666,67 + 23333,33 = 50000$ MT
- Rendimento: $0,05(26666,67) + 0,08(23333,33) = 1333,33 + 1866,67 = 3200$ MT

Resposta: 26.666,67 MT a 5

Problema 3: Movimento Rectilíneo

Problema: Dois carros partem simultaneamente de cidades distantes 300 km. Se viajam no mesmo sentido, o carro mais rápido alcança o mais lento em 6 horas. Se viajam em sentidos opostos, encontram-se em 2 horas. Quais são as velocidades dos carros?

Solução:
Definindo as variáveis:

- v_1 = velocidade do carro mais rápido (km/h)
- v_2 = velocidade do carro mais lento (km/h)

Análise das situações:
Mesmo sentido (6 horas): O carro rápido percorre 300 km a mais que o lento:

$$6v_1 - 6v_2 = 300$$

$$v_1 - v_2 = 50$$

Sentidos opostos (2 horas): Juntos percorrem 300 km:

$$2v_1 + 2v_2 = 300$$

$$v_1 + v_2 = 150$$

Sistema:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = 50 \\ v_1 + v_2 = 150 \end{cases}$$

Resolução por adição: Somando as equações:

$$2v_1 = 200 \Rightarrow v_1 = 100 \text{ km/h}$$

Substituindo:

$$100 + v_2 = 150 \Rightarrow v_2 = 50 \text{ km/h}$$

Verificação:

- Mesmo sentido: Em 6h, o carro rápido percorre $100 \times 6 = 600$ km e o lento $50 \times 6 = 300$ km. Diferença: $600 - 300 = 300$ km
- Sentidos opostos: Em 2h, juntos percorrem $100 \times 2 + 50 \times 2 = 300$ km

Resposta: O carro mais rápido viaja a 100 km/h e o mais lento a 50 km/h.

Problema 4: Geometria

Problema: Um rectângulo tem perímetro igual a 28 cm e área igual a 45 cmš. Determine as dimensões do rectângulo.

Solução:
Definindo as variáveis:

- x = comprimento do rectângulo (cm)
- y = largura do rectângulo (cm)

Sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 28 \quad \text{(perímetro)} \\ xy = 45 \quad \text{(área)} \end{cases}$$

Simplificando a primeira equação:

$$x + y = 14 \Rightarrow y = 14 - x$$

Substituindo na segunda equação:

$$x(14 - x) = 45$$

$$14x - x^2 = 45$$

$$x^2 - 14x + 45 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática:

$$\Delta = 14^2 - 4(1)(45) = 196 - 180 = 16$$

$$x = \frac{14 \pm 4}{2}$$

Soluções: $x_1 = 9$ e $x_2 = 5$
Valores correspondentes de y:

- Se $x = 9$, então $y = 14 - 9 = 5$
- Se $x = 5$, então $y = 14 - 5 = 9$

Verificação:

- Perímetro: $2(9) + 2(5) = 28$ cm
- Área: $9 \times 5 = 45$ cmš

Resposta: As dimensões são 9 cm e 5 cm.

Exercícios

1. Resolva o sistema usando o método da substituição:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$$

Solução:
Da segunda equação: $x = 7 - 4y$
Substituindo na primeira:

$$3(7 - 4y) - 2y = 1$$

$$21 - 12y - 2y = 1$$

$$-14y = -20$$

$$y = \frac{10}{7}$$

$$x = 7 - 4 \cdot \frac{10}{7} = 7 - \frac{40}{7} = \frac{9}{7}$$

Resposta: $S = \left\{\left(\frac{9}{7}, \frac{10}{7}\right)\right\}$

2. Resolva graficamente o sistema e classifique-o:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

Solução:
Igualando as expressões:

$$2x - 1 = -x + 2$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

$$y = 2(1) - 1 = 1$$

O ponto de intersecção é $(1, 1)$.

Como as retas têm coeficientes angulares diferentes ($m_1 = 2 \neq -1 = m_2$), elas se interceptam em um único ponto.

Resposta: $S = \{(1,1)\}$ - Sistema Possível e Determinado.

3. Uma loja vendeu 120 artigos entre camisas e calças. O preço de uma camisa é 450,00 MT e o de uma calça é 800,00 MT. Se o total arrecadado foi 75.000,00 MT, quantas camisas e quantas calças foram vendidas?

   Solução:

   Seja c = número de camisas e p = número de calças.

   Sistema:

$$\begin{cases} c + p = 120 \\ 450c + 800p = 75000 \end{cases}$$

   Da primeira equação: $c = 120 - p$

   Substituindo na segunda:

$$450(120 - p) + 800p = 75000$$

$$54000 - 450p + 800p = 75000$$

$$350p = 21000$$

$$p = 60$$

$$c = 120 - 60 = 60$$

   Verificação:

   - Total: $60 + 60 = 120$
   - Valor: $450(60) + 800(60) = 27000 + 48000 = 75000$ MT

   Resposta: 60 camisas e 60 calças.

4. Use a Regra de Cramer para resolver:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$$

   Solução:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 4(3) = -14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 8(-1) - 2(3) = -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(8) = -28$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{-14} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{-14} = 2$$

   Resposta: $S = \{(1,2)\}$

5. Dois números têm soma igual a 50 e diferença igual a 12. Determine esses números.

   Solução:

   Sejam x e y os números procurados.

   Sistema:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = 12 \end{cases}$$

   Somando as equações:

$$2x = 62 \Rightarrow x = 31$$

   Substituindo:

$$31 + y = 50 \Rightarrow y = 19$$

   Verificação:

   - Soma: $31 + 19 = 50$
   - Diferença: $31 - 19 = 12$

   Resposta: Os números são 31 e 19.

1.8 Razão, proporção, escala e porcentagem

1.8.1 Razão

A **razão** é uma comparação entre duas grandezas da mesma espécie, por meio de uma divisão. Ela nos permite compreender quantas vezes uma grandeza contém a outra ou qual é a relação entre elas.

Definição de Razão

Dizemos que a **razão entre dois números** a **e** b (com $b \neq 0$) é o quociente entre eles:

$$\text{Razão} = \frac{a}{b}$$

Importante: A ordem dos valores influencia o resultado da razão!

Exemplos de Razão

- A razão entre 12 e 4 é $\frac{12}{4} = 3$
- A razão entre 4 e 12 é $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
- Em uma sala com 10 meninas e 15 meninos, a razão entre meninas e meninos é $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

1.8.2 Tipos de Razão

Razão entre Grandezas

Podemos encontrar razão entre diferentes grandezas, desde que sejam **grandezas da mesma natureza**, como:

- **Razão entre comprimentos:** Ex: $\frac{6\,\text{m}}{2\,\text{m}} = 3$
- **Razão entre áreas:** Ex: $\frac{24\,\text{m}^2}{6\,\text{m}^2} = 4$
- **Razão entre quantidades:** Ex: $\frac{5\,\text{pessoas}}{10\,\text{lugares}} = \frac{1}{2}$

1.8.3 Proporção

Definição de Proporção

Uma **proporção** é uma **igualdade entre duas razões**. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (com $b \neq 0$ e $d \neq 0$), dizemos que a, b, c e d formam uma proporção.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Esse produto cruzado é chamado de **multiplicação em cruz**.

Exemplos de Proporção

- $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ pois $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 12$
- $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ pois $5 \cdot 24 = 8 \cdot 15 = 120$

1.8.4 Propriedades das Proporções

Propriedades Fundamentais

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então:

- **Multiplicação cruzada:** $a \cdot d = b \cdot c$
- **Permutação:** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$
- **Inversão:** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
- **Composição:** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
- **Decomposição:** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

1.8.5 Grandezas Proporcionais

Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais

Grandezas diretamente proporcionais: Se uma grandeza aumenta (ou diminui), a outra também aumenta (ou diminui), na mesma razão.
Grandezas inversamente proporcionais: Se uma grandeza aumenta, a outra diminui, e vice-versa, de forma inversa.

Exemplos de Proporcionalidade

Diretamente proporcionais:

- O número de horas trabalhadas e o salário recebido (mais horas, mais salário)
- A quantidade de produtos comprados e o valor total pago

Inversamente proporcionais:

- Número de operários e o tempo para concluir uma obra (mais operários, menos tempo)
- Velocidade e tempo de percurso (maior velocidade, menor tempo)

Exercícios

1. Calcule a razão entre 18 e 6.
Solução: $\frac{18}{6} = 3$
2. Verifique se os pares formam proporção: $\frac{7}{14} = \frac{3}{6}$
Solução: $7 \cdot 6 = 42$ e $14 \cdot 3 = 42$ Sim, formam proporção.
3. Uma receita usa 2 xícaras de açúcar para cada 3 de farinha. Se forem usadas 9 xícaras de farinha, quantas de açúcar devem ser usadas?
Solução:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{9} \Rightarrow 2 \cdot 9 = 3 \cdot x \Rightarrow 18 = 3x \Rightarrow x = 6$$

4. Em uma fábrica, 4 máquinas produzem 120 peças por hora. Quantas peças produzirão 6 máquinas, na mesma taxa?
Solução: Grandezas diretamente proporcionais.

$$\frac{4}{120} = \frac{6}{x} \Rightarrow 4x = 720 \Rightarrow x = 180$$

Logo, 6 máquinas produzirão 180 peças por hora.

1.8.6 Escala

Definição Escala

A **escala** é a razão entre uma medida no desenho (ou no mapa) e a medida real correspondente no objeto representado. Ela é usada para representar objetos grandes em tamanhos menores (redução) ou objetos pequenos em tamanhos maiores (ampliação).

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida no desenho}}{\text{Medida real}}$$

Importante: Ambas as medidas devem estar na mesma unidade!

Exemplos de Escala

- Uma escala de $1 : 100$ significa que 1 unidade no desenho representa 100 unidades na realidade.
- Se 2 cm em um mapa representam 10 km reais, então:

$$\text{Escala} = \frac{2\,\text{cm}}{10\,\text{km}} = \frac{2}{1\,000\,000} = 1 : 500\,000$$

Fórmulas Importantes de Escala

- **Escala:** $\text{Escala} = \dfrac{\text{desenho}}{\text{real}}$
- **Medida real:** $\text{Real} = \dfrac{\text{desenho}}{\text{escala}}$
- **Medida no desenho:** $\text{Desenho} = \text{escala} \times \text{real}$

1.8.7 Porcentagem

Definição Porcentagem

A **porcentagem** representa uma razão com denominador 100. É uma forma de expressar uma parte de um total dividido em 100 partes iguais.

$$x\% = \frac{x}{100}$$

É muito usada em situações do cotidiano como descontos, aumentos, impostos, juros, estatísticas, entre outros.

Exemplos de Porcentagem

- 20% de 150:

$$\frac{20}{100} \times 150 = 30$$

- Um produto com **25% de desconto** sobre 200 MT:

$$\text{Desconto} = \frac{25}{100} \times 200 = 50MT \quad \Rightarrow \quad \text{Preço com desconto} = 200 - 50 = 150MT$$

- Aumento de **10%** sobre 300 MT:

$$\text{Aumento} = \frac{10}{100} \times 300 = 30MT \quad \Rightarrow \quad \text{Novo valor} = 300 + 30 = 330MT$$

Fórmulas Fundamentais de Porcentagem

- **Porcentagem de um valor:** $\frac{p}{100} \times V$
- **Aumento percentual:** $V_{\text{novo}} = V + \left(\frac{p}{100} \times V\right)$
- **Redução percentual:** $V_{\text{novo}} = V - \left(\frac{p}{100} \times V\right)$

Exercícios

1. Um mapa tem escala $1 : 25\,000$. Qual a distância real representada por 8 cm no mapa?
Solução:

$$\text{Real} = 8 \times 25\,000 = 200\,000\,\text{cm} = 2\,000\,\text{m} = 2\,\text{km}$$

2. Qual é o valor de 12% de 850 MT?
Solução:

$$\frac{12}{100} \times 850 = 102$$

3. Um produto que custava 500 MT teve um desconto de 15%. Qual é o novo preço?
Solução:

$$\text{Desconto} = \frac{15}{100} \times 500 = 75 \quad \Rightarrow \quad \text{Novo preço} = 500 - 75 = 425MT$$

4. Um salário foi aumentado em 10%. Se o salário inicial era 1 200 MT, qual é o novo salário?
Solução:

$$\text{Aumento} = \frac{10}{100} \times 1\,200 = 120 \quad \Rightarrow \quad \text{Salário final} = 1\,200 + 120 = 1\,320MT$$

1.9 Lógica Matemática

A **lógica matemática** é o ramo da Matemática que estuda os princípios do **raciocínio válido** e as regras que governam a **argumentação correta**, fornecendo ferramentas para analisar a validade de proposições e argumentos.

1.9.1 Proposições

Definição de Proposição

Uma **proposição** é uma sentença declarativa que pode ser classificada como **verdadeira** ou **falsa**, mas não ambas ao mesmo tempo.
Características:

- Deve ser uma **afirmação** (não pergunta, ordem ou exclamação);
- Deve ter um **valor lógico** definido (verdadeiro ou falso);
- Não pode ser **ambígua** ou **subjetiva**.

Exemplos de Proposições

Proposições verdadeiras:

- "$2 + 3 = 5$"
- "Maputo é a capital do Moçambique"
- "Todo número par é divisível por 2"

Proposições falsas:

- "$5 > 10$"
- "A Terra é plana"
- "Todos os gatos são verdes"

Não são proposições:

- "Que horas são?"(pergunta)
- "Feche a porta!"(ordem)
- "$x + 2 = 5$"(contém variável)

1.9.2 Conectivos Lógicos

Conectivos Lógicos

Os **conectivos lógicos** são símbolos utilizados para combinar proposições simples e formar proposições compostas.

Principais Conectivos

- **Negação** ($\sim$ ou $\neg$): "não"
- **Conjunção** ($\wedge$): "e"
- **Disjunção** ($\vee$): "ou"
- **Condicional** ($\rightarrow$): "se... então"
- **Bicondicional** ($\leftrightarrow$): "se e somente se"

1.9.3 Negação ($\sim$)

Quando a Negação é Verdadeira ou Falsa

A **negação** de uma proposição p (simbolizada por $\sim p$):

- É **verdadeira** quando p é **falsa**
- É **falsa** quando p é **verdadeira**

Exemplos de Negação

- p: "Hoje é segunda-feira"(verdadeira)
- $\sim p$: "Hoje não é segunda-feira"(falsa)
- q: "$5 > 10$"(falsa)
- $\sim q$: "5 não é maior que 10"ou "$5 \leq 10$"(verdadeira)

1.9.4 Conjunção ($\wedge$)

Quando a Conjunção é Verdadeira ou Falsa

A **conjunção** $p \wedge q$ (lê-se "p e q"):

- É **verdadeira** apenas quando **ambas** as proposições p e q são verdadeiras
- É **falsa** em todos os outros casos (quando pelo menos uma é falsa)

Exemplos de Conjunção

- p: "Está sol"(V) e q: "Está calor"(V) $p \wedge q$: "Está sol e está calor"(V)
- p: "Está sol"(V) e q: "Está frio"(F) $p \wedge q$: "Está sol e está frio"(F)
- p: "Está chovendo"(F) e q: "Está calor"(V) $p \wedge q$: "Está chovendo e está calor"(F)
- p: "$5 > 10$"(F) e q: "$2 + 2 = 5$"(F) $p \wedge q$: "$5 > 10$ e $2 + 2 = 5$"(F)

1.9.5 Disjunção ($\vee$)

Quando a Disjunção é Verdadeira ou Falsa

A **disjunção** $p \vee q$ (lê-se "p ou q"):

- É **verdadeira** quando **pelo menos uma** das proposições p ou q é verdadeira
- É **falsa** apenas quando **ambas** as proposições p e q são falsas

Exemplos de Disjunção

- p: "Vou de carro"(V) e q: "Vou de ônibus"(F) $p \vee q$: "Vou de carro ou de ônibus"(V)
- p: "Hoje é sábado"(F) e q: "Hoje é domingo"(V) $p \vee q$: "Hoje é sábado ou domingo"(V)
- p: "2 é par"(V) e q: "3 é par"(V) $p \vee q$: "2 é par ou 3 é par"(V)
- p: "$5 > 10$"(F) e q: "$2 + 2 = 5$"(F) $p \vee q$: "$5 > 10$ ou $2 + 2 = 5$"(F)

1.9.6 Condicional ($\rightarrow$)

Quando a Condicional é Verdadeira ou Falsa

A **condicional** $p \rightarrow q$ (lê-se "se p, então q"):

- É **falsa** apenas quando p é verdadeira e q é falsa
- É **verdadeira** em todos os outros casos

Memorize: "A condicional só é falsa quando a promessa é quebrada"

Exemplos de Condicional

- p: "Estudo"(V) e q: "Passo na prova"(V) $p \rightarrow q$: "Se estudo, então passo na prova"(V)
- p: "Estudo"(V) e q: "Passo na prova"(F) $p \rightarrow q$: "Se estudo, então passo na prova"(F)
- p: "Estudo"(F) e q: "Passo na prova"(V) $p \rightarrow q$: "Se estudo, então passo na prova"(V)
- p: "Estudo"(F) e q: "Passo na prova"(F) $p \rightarrow q$: "Se estudo, então passo na prova"(V)

Explicação: Quando não estudo (F), a promessa não foi testada, então não pode ser considerada falsa.

1.9.7 Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Quando a Bicondicional é Verdadeira ou Falsa

A **bicondicional** $p \leftrightarrow q$ (lê-se "p se e somente se q"):

- É **verdadeira** quando p e q têm o **mesmo valor lógico** (ambas V ou ambas F)
- É **falsa** quando p e q têm **valores lógicos diferentes**

Exemplos de Bicondicional

- p: "Número é par"(V) e q: "Número é divisível por 2"(V) $p \leftrightarrow q$ (V)
- p: "Triângulo é equilátero"(V) e q: "Triângulo tem 3 lados iguais"(V) $p \leftrightarrow q$ (V)
- p: "Está chovendo"(V) e q: "Está sol"(F) $p \leftrightarrow q$ (F)
- p: "$5 > 10$"(F) e q: "$2 + 2 = 5$"(F) $p \leftrightarrow q$ (V)

Resumo dos Conectivos

Sejam as proposições:

- p: "Está chovendo"
- q: "Levo guarda-chuva"

Proposições compostas:

- $\sim p$: "Não está chovendo"
- $p \wedge q$: "Está chovendo e levo guarda-chuva"
- $p \vee q$: "Está chovendo ou levo guarda-chuva"
- $p \rightarrow q$: "Se está chovendo, então levo guarda-chuva"
- $p \leftrightarrow q$: "Está chovendo se e somente se levo guarda-chuva"

1.9.8 Tabela-Verdade

Tabela-Verdade

A **tabela-verdade** é uma ferramenta que mostra todos os possíveis valores lógicos de uma proposição composta, considerando todas as combinações possíveis dos valores lógicos das proposições simples que a compõem.

Tabelas-Verdade dos Conectivos

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Construindo uma Tabela-Verdade

Para a proposição: $(p \wedge q) \rightarrow \sim r$

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim r$	$(p \wedge q) \rightarrow \sim r$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

1.9.9 Equivalências Lógicas

Equivalência Lógica

Duas proposições são **logicamente equivalentes** quando possuem os mesmos valores lógicos para todas as possíveis combinações dos valores lógicos de suas proposições simples.
Notação: $p \equiv q$ (lê-se: "p é equivalente a q")

Principais Equivalências

- **Leis de De Morgan:**
  1. $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
  2. $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
- **Dupla Negação:** $\sim (\sim p) \equiv p$
- **Condicional:** $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- **Bicondicional:** $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- **Comutatividade:**
  1. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
  2. $p \vee q \equiv q \vee p$

1.9.10 Negação, Tautologia e Contradição

Classificação das Proposições

As proposições compostas podem ser classificadas em:

- **Tautologia**: Proposição sempre verdadeira
- **Contradição**: Proposição sempre falsa
- **Contingência**: Proposição que pode ser verdadeira ou falsa

Exemplos de Classificação

Tautologia:

- $p \vee \sim p$ (sempre verdadeira)
- $p \to p$ (sempre verdadeira)

Contradição:

- $p \wedge \sim p$ (sempre falsa)
- $p \wedge \sim (p \vee q)$ (sempre falsa)

Contingência:

- $p \wedge q$ (depende dos valores de p e q)
- $p \to q$ (depende dos valores de p e q)

Negação de Proposições Compostas

- $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
- $\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$
- $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \vee \sim p \wedge q$

Exercícios

1. Determine se as seguintes sentenças são proposições:

a) "O número 17 é primo"

b) "Estude mais!"

c) "x > 5"

d) "2 + 2 = 4"

2. Construa a tabela-verdade para: $(p \vee q) \wedge \sim r$
3. Verifique se $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$
4. Classifique as proposições como tautologia, contradição ou contingência:

a) $p \vee \sim p$

b) $p \wedge \sim p$

c) $p \to (p \vee q)$

5. Encontre a negação de: "Se estudo, então passo na prova"

1.10 Polinómios

Os **polinômios** são expressões algébricas formadas pela soma de termos, onde cada termo é o produto de um coeficiente (número real) por uma potência não-negativa de uma variável.

1.10.1 Definição

Definição de Polinômio

Um **polinômio** na variável x é uma expressão da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

onde:

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são números reais chamados **coeficientes**
- n é um número natural chamado **grau do polinômio** (quando $a_n \neq 0$)
- a_n é o **coeficiente dominante**
- a_0 é o **termo independente**

Exemplos de Polinômios

- $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 1$ (grau 4)
- $Q(x) = x^2 + 4x + 4$ (grau 2)
- $R(x) = 7x - 3$ (grau 1)
- $S(x) = 5$ (grau 0, polinômio constante)
- $T(x) = 0$ (polinômio nulo)

Não são polinômios:

- $f(x) = \frac{1}{x}$ (expoente negativo)
- $g(x) = \sqrt{x}$ (expoente fracionário)
- $h(x) = x^{1,5}$ (expoente não inteiro)

Classificação dos Polinômios por Grau

- **Grau 0**: Polinômio constante: $P(x) = a_0$
- **Grau 1**: Polinômio linear: $P(x) = a_1x + a_0$
- **Grau 2**: Polinômio quadrático: $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
- **Grau 3**: Polinômio cúbico: $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
- **Grau n**: Polinômio de grau n

1.10.2 Valor Numérico de um Polinômio

Valor Numérico

O **valor numérico** de um polinômio $P(x)$ para $x = a$ é o número real obtido substituindo-se x por a na expressão do polinômio.
Notação: $P(a)$ representa o valor numérico de $P(x)$ quando $x = a$.
Se $P(a) = 0$, dizemos que a é uma **raiz** ou **zero** do polinômio.

Cálculo do Valor Numérico

Dado $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$, calcular:
a) $P(1)$:
$$P(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 + (1) - 5 = 2 - 3 + 1 - 5 = -5$$
b) $P(2)$:
$$P(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 + (2) - 5 = 16 - 12 + 2 - 5 = 1$$
c) $P(-1)$:
$$P(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + (-1) - 5 = -2 - 3 - 1 - 5 = -11$$
Como $P(1) = -5 \neq 0$, $x = 1$ não é raiz do polinômio.

1.10.3 Teorema do Resto

Teorema do Resto

O **Teorema do Resto** estabelece que: o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $(x - a)$ é igual ao valor numérico $P(a)$.
Formalmente: Se $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$, então $R = P(a)$.
Corolário: $P(a) = 0$ se e somente se $(x - a)$ é um fator de $P(x)$.

Aplicação do Teorema do Resto

Determinar o resto da divisão de $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ por $(x - 2)$.
Solução: Pelo Teorema do Resto, o resto é $P(2)$:
$$P(2) = (2)^3 - 2(2)^2 + 3(2) - 1 = 8 - 8 + 6 - 1 = 5$$
Portanto, o resto da divisão é 5.
Verificação: $(x - 2)$ é fator de $P(x)$? Como $P(2) = 5 \neq 0$, $(x - 2)$ não é fator de $P(x)$.

1.10.4 Divisão de Polinômios

Divisão de Polinômios

A **divisão de polinômios** segue o mesmo princípio da divisão de números inteiros.
Dados os polinômios $P(x)$ (dividendo) e $D(x)$ (divisor), com $D(x) \neq 0$, existem únicos polinômios $Q(x)$ (quociente) e $R(x)$ (resto) tais que:
$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$
onde o grau de $R(x)$ é menor que o grau de $D(x)$.

Divisão por Binômios

Divisão por $(x - a)$

Para dividir um polinômio $P(x)$ por $(x - a)$, podemos usar:
1. Teorema do Resto: $R = P(a)$
2. Algoritmo de Ruffini (Briot-Ruffini):

- Organizar os coeficientes de $P(x)$ em ordem decrescente
- Usar o valor a para calcular o quociente
- O último valor é o resto

Divisão usando Briot-Ruffini

Dividir $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ por $(x - 2)$.
Dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -5 & 3 & -1 \\ 2 & & 4 & -2 & 2 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & \multicolumn{1}{|c}{1} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Cálculo:

- $2 \cdot 2 = 4$; $-5 + 4 = -1$
- $-1 \cdot 2 = -2$; $3 + (-2) = 1$
- $1 \cdot 2 = 2$; $-1 + 2 = 1$

Resultado: $Q(x) = 2x^2 - x + 1$ e $R = 1$
Verificação: $P(x) = (x - 2)(2x^2 - x + 1) + 1$

Divisão pelo Método da Chave

Dividir $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ por $D(x) = x^2 - 1$.

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - x - 2 \div (x^2 - 1) \\ x^3 + 0x^2 + 0x - x = x(x^2 - 1) \\ \hline 0x^3 + 2x^2 + 0x - 2 \\ 2x^2 + 0x - 2 = 2(x^2 - 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

Resultado: $Q(x) = x + 2$ e $R(x) = 0$
Portanto: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x^2 - 1)(x + 2)$

1.10.5 Polinômios Idênticos

Polinômios Idênticos

Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são **idênticos** quando possuem os mesmos coeficientes para termos de mesmo grau.
Notação: $P(x) \equiv Q(x)$
Condição: $P(x) \equiv Q(x)$ se e somente se $P(a) = Q(a)$ para todo valor real a.

Determinação de Coeficientes

Determinar os valores de a, b e c para que os polinômios sejam idênticos:

$$P(x) = 2x^2 + ax + b \quad \text{e} \quad Q(x) = cx^2 + 3x - 1$$

Solução: Para que $P(x) \equiv Q(x)$, devemos ter:

- Coeficiente de x^2: $2 = c \Rightarrow c = 2$
- Coeficiente de x: $a = 3$
- Termo independente: $b = -1$

Resposta: $a = 3$, $b = -1$, $c = 2$
Verificação: $P(x) = 2x^2 + 3x - 1 \equiv Q(x) = 2x^2 + 3x - 1$

1.10.6 Operações com Polinômios

Adição e Subtração

Adição e Subtração de Polinômios

Para **somar** ou **subtrair** polinômios, adicionamos ou subtraímos os coeficientes dos termos de mesmo grau.
Propriedades:

- O grau da soma é no máximo igual ao maior grau dos polinômios
- A operação é comutativa e associativa

Adição e Subtração

Dados $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 5$ e $Q(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$:
a) $P(x) + Q(x)$:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (3x^3 - 2x^2 + x - 5) + (x^3 + 4x^2 - 3x + 2) \\ &= (3+1)x^3 + (-2+4)x^2 + (1-3)x + (-5+2) \\ &= 4x^3 + 2x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

b) $P(x) - Q(x)$:

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (3x^3 - 2x^2 + x - 5) - (x^3 + 4x^2 - 3x + 2) \\ &= (3-1)x^3 + (-2-4)x^2 + (1+3)x + (-5-2) \\ &= 2x^3 - 6x^2 + 4x - 7 \end{aligned}$$

Multiplicação

Multiplicação de Polinômios

Para **multiplicar** polinômios, aplicamos a propriedade distributiva, multiplicando cada termo do primeiro polinômio por cada termo do segundo.
Propriedades:

- O grau do produto é a soma dos graus dos fatores
- A operação é comutativa e associativa
- Distributiva em relação à adição

Multiplicação de Polinômios

Calcular $(2x^2 - 3x + 1) \cdot (x + 2)$:

$$\begin{aligned} &(2x^2 - 3x + 1) \cdot (x + 2) \\ &= 2x^2 \cdot x + 2x^2 \cdot 2 - 3x \cdot x - 3x \cdot 2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2 \\ &= 2x^3 + 4x^2 - 3x^2 - 6x + x + 2 \\ &= 2x^3 + x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

Verificação do grau: $\text{grau}(2x^2 - 3x + 1) = 2$ e $\text{grau}(x + 2) = 1$ Logo, grau do produto $= 2 + 1 = 3$

Produtos Notáveis

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exercícios

1. Classifique os polinômios por grau e identifique o coeficiente dominante:

a) $P(x) = 4x^3 - 2x + 7$

b) $Q(x) = -x^5 + 3x^2 - 1$

c) $R(x) = 2x - 5$

2. Dado $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, calcule:

a) $P(1)$

b) $P(2)$

c) $P(-1)$

3. Use o Teorema do Resto para encontrar o resto da divisão:

a) $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ por $(x-1)$

b) $Q(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 3$ por $(x+2)$

4. Efetue a divisão usando Briot-Ruffini:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \div (x-1)$$

5. Determine a, b e c para que os polinômios sejam idênticos:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{e} \quad Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

6. Calcule:

a) $(x^2 + 3x - 1) + (2x^2 - x + 4)$

b) $(3x^3 - 2x + 5) - (x^3 + 4x^2 - 3)$

c) $(x+2)(x^2 - 3x + 1)$


TrocaPay
Seu saldo de PayPal em Metical, Rápido e Seguro.
O seu saldo
PayPal no M-pesa
Transfere o seu saldo
ESTAGNADO no PayPal
para o M-pesa ou E-mola
por uma Taxa adicional
de +12%
SOLICITE -NOS
Cell: +258 87 936 9395
Morada: Polana Caniço A,
Av. Vladimir Lenine, Maputo,
Moçambique
Fácil, Rápido
e Seguro


TrocaPay
Aceitamos toda
Moeda
estrangeira
Pagamentos mobile
Digital câmbio
Transferência carteiras
móveis
Cartões de crédito
SOLICITE NOS JÁ
Telefone
879369395
Morada
Polana Caniço A, Av. Vladimir
Lenine, Maputo, Moçambique

Capítulo 2

Cálculo Algébrico

2.1 Função, equação e inequação do segundo grau

A **função do** $2°$ **grau** (ou função quadrática) é uma das mais importantes funções matemáticas, presente em diversas aplicações práticas como movimento de projéteis, problemas de otimização e modelagem de fenômenos naturais.

Definição

Uma função do $2°$ grau é definida por:

- **Forma geral:** $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$
- **Domínio:** $\mathbb{R}$ (todos os números reais)
- **Gráfico:** Uma curva chamada **parábola**
- **Coeficientes:** a, b e c são números reais com $a \neq 0$

2.1.1 Forma Geral e Canônica

Formas da Função Quadrática

1. Forma Geral:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{onde } a \neq 0$$

2. Forma Canônica (ou Forma Padrão):

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

onde (x_v, y_v) são as coordenadas do vértice da parábola.

3. Forma Fatorada:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

onde x_1 e x_2 são as raízes da função (quando existem).

Coeficiente a: Determina:

- A concavidade da parábola
- A "abertura"da parábola
- Se $a > 0$: concavidade para cima
- Se $a < 0$: concavidade para baixo

Coeficiente b: Influencia:

- A posição horizontal do vértice
- A inclinação da parábola

Coeficiente c: Representa:

- O valor de $f(0)$
- O ponto onde a parábola cruza o eixo y

Exemplo: Convertendo para Forma Canônica

Problema: Converta $f(x) = x^2 - 4x + 3$ para a forma canônica.

Solução:

1. **Método: Completar o quadrado**
$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$
2. **Isolar os termos com x:**
$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$
3. **Completar o quadrado:** Para $x^2 - 4x$, adicionar e subtrair $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$:
$$f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3$$
4. **Formar o quadrado perfeito:**
$$f(x) = (x-2)^2 - 1$$
5. **Resposta:**
$$\boxed{f(x) = (x-2)^2 - 1}$$
Vértice: $(2, -1)$

2.1.2 Análise do Gráfico

Elementos Importantes da Parábola

1. Vértice: Ponto de máximo ou mínimo da função
$$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad y_v = f(x_v) = -\frac{\Delta}{4a}$$
2. Discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$
3. Raízes (zeros da função):
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
4. Eixo de Simetria: Reta vertical $x = x_v$
5. Ponto de intersecção com eixo y: $(0, c)$

Análise do Discriminante

O discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ determina:

$\Delta > 0$: Duas raízes reais e distintas

- A parábola cruza o eixo x em dois pontos

$\Delta = 0$: Uma raiz real dupla

- A parábola toca o eixo x em um ponto (vértice)

$\Delta < 0$: Não há raízes reais

- A parábola não cruza o eixo x

Exemplo: Análise Completa de uma Parábola

Problema: Analise completamente a função $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Solução:

1. **Identificar os coeficientes:** $a = -1$, $b = 2$, $c = 3$
2. **Concavidade:** Como $a = -1 < 0$, a concavidade é para baixo (parábola "invertida")
3. **Vértice:**
$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$$
$$y_v = f(1) = -(1)^2 + 2(1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$$
Vértice: $(1, 4)$
4. **Discriminante:**
$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-1)(3) = 4 + 12 = 16 > 0$$
Como $\Delta > 0$, há duas raízes reais distintas.
5. **Raízes:**
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2}$$
$$x_1 = \frac{-2+4}{-2} = -1, \quad x_2 = \frac{-2-4}{-2} = 3$$
6. **Intersecção com eixo y:** $f(0) = c = 3$, ponto $(0, 3)$
7. **Resumo:**
    - Concavidade: para baixo
    - Vértice: $(1, 4)$ (ponto de máximo)
    - Raízes: $x = -1$ e $x = 3$
    - Intersecção com eixo y: $(0, 3)$
    - Imagem: $(-\infty, 4]$

2.1.3 Resolução de Equações do 2° Grau

Métodos de Resolução

1. Fórmula de Bhaskara:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
2. Fatoração: Quando possível, escrever $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
3. Completar o Quadrado: Transformar em $(x - h)^2 = k$
4. Casos Especiais:

- Se $c = 0$: $ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$
- Se $b = 0$: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$

Exemplo: Diferentes Métodos de Resolução

Problema: Resolva $2x^2 - 8x + 6 = 0$ usando diferentes métodos.

Métodos:
Método 1 - Fórmula de Bhaskara:

1. $a = 2$, $b = -8$, $c = 6$
2. $\Delta = (-8)^2 - 4(2)(6) = 64 - 48 = 16$

3. $x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4}$

4. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

Método 2 - Fatoração:

1. Dividir por 2: $x^2 - 4x + 3 = 0$
2. Procurar dois números que multiplicados deem 3 e somados deem -4
3. $(x - 3)(x - 1) = 0$
4. $x = 3$ ou $x = 1$

Método 3 - Completar o Quadrado:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$x^2 - 4x = -3$$
$$(x - 2)^2 - 4 = -3$$
$$(x - 2)^2 = 1$$
$$x - 2 = \pm 1$$
$$x = 3 \text{ ou } x = 1$$

2.1.4 Resolução de Inequações do 2ž Grau

Método do Estudo de Sinal

Para resolver inequações quadráticas:

1. **Encontrar as raízes** da função
2. **Analisar o sinal** de a (concavidade)
3. **Construir o gráfico mental** da parábola
4. **Determinar os intervalos** onde a função é positiva/negativa

Tabela de Sinais

Para $f(x) = ax^2 + bx + c$ com raízes $x_1 < x_2$:

Intervalo	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	$(x_2, +\infty)$
$a > 0$	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) > 0$
$a < 0$	$f(x) < 0$	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$

Casos especiais:

- Se $\Delta = 0$: apenas uma raiz, função não muda de sinal
- Se $\Delta < 0$: sem raízes reais, sinal constante (mesmo de a)

Exemplo: Resolvendo Inequações

Problema: Resolva $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$.

Solução:

1. **Identificar coeficientes:** $a = -1$, $b = 5$, $c = -6$

2. **Encontrar as raízes:** $\Delta = 25 - 4(-1)(-6) = 25 - 24 = 1$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{-2} \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 3$$

3. **Analisar o sinal:** Como $a = -1 < 0$, a parábola tem concavidade para baixo.

4. **Construir tabela de sinais:**

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2,3)$	3	$(3, +\infty)$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

5. **Solução da inequação:** Como queremos $f(x) \geq 0$, a resposta é:

$$\boxed{S = [2, 3]}$$

2.1.5 Expressões do 2° Grau - Métodos Avançados

Fatoração Avançada

Além dos métodos básicos, existem técnicas especiais:

Agrupamento: Para expressões de 4 termos

Diferença de quadrados: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Quadrado da soma/diferença: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

Fatoração por tentativa: Para casos mais complexos

Exemplo: Fatoração Complexa

Problema: Fatore completamente $6x^2 + 13x - 5$.

Solução:

1. **Método ac:** $a \cdot c = 6 \cdot (-5) = -30$

2. **Procurar dois números:** Números que multiplicados deem -30 e somados deem 13: 15 e -2 (pois $15 \cdot (-2) = -30$ e $15 + (-2) = 13$)

3. **Reescrever o termo do meio:**

$$6x^2 + 13x - 5 = 6x^2 + 15x - 2x - 5$$

4. **Agrupar e fatorar:**

$$= 3x(2x+5) - 1(2x+5)$$
$$= (3x-1)(2x+5)$$

5. **Verificação:**

$$(3x-1)(2x+5) = 6x^2 + 15x - 2x - 5 = 6x^2 + 13x - 5$$

6. **Resposta:**

$$\boxed{6x^2 + 13x - 5 = (3x-1)(2x+5)}$$

2.1.6 Construção de Gráficos - Exemplos Visuais

Gráfico 1: Parábola com Concavidade para Cima - $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Construção Passo a Passo:

1. **Análise dos coeficientes:** $a = 1 > 0$ (concavidade para cima), $b = -4$, $c = 3$
2. **Vértice:** $x_v = -\frac{(-4)}{2(1)} = 2$, $y_v = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$ Vértice: $(2, -1)$
3. **Raízes:** $\Delta = 16 - 12 = 4$ $x = \frac{4 \pm 2}{2} = 3$ ou 1
4. **Pontos importantes:**

x	$f(x) = x^2 - 4x + 3$	Ponto (x, y)
0	3	$(0, 3)$
1	0	$(1, 0)$
2	-1	$(2, -1)$
3	0	$(3, 0)$
4	3	$(4, 3)$

5. **Características:**
   - Vértice: $(2, -1)$ (ponto de mínimo)
   - Raízes: $x = 1$ e $x = 3$
   - Eixo de simetria: $x = 2$
   - Imagem: $[-1, +\infty)$

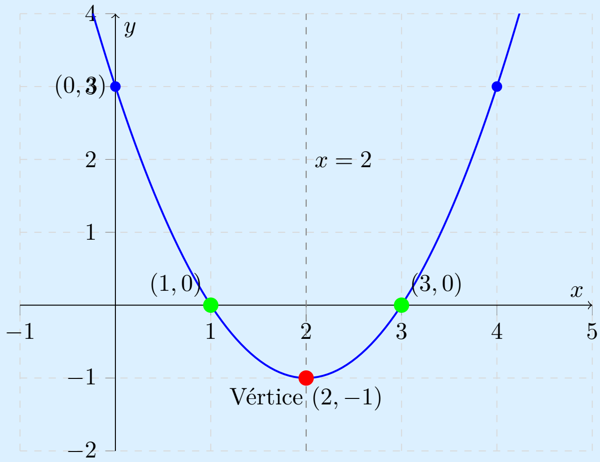


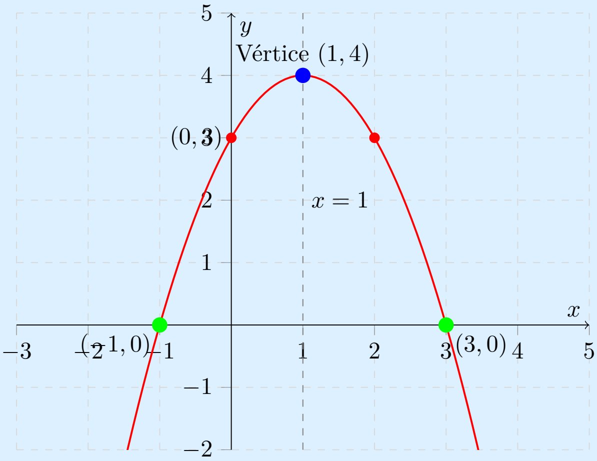
Gráfico 2: Parábola com Concavidade para Baixo - $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

Construção Passo a Passo:

1. **Análise dos coeficientes:** $a = -1 < 0$ (concavidade para baixo), $b = 2$, $c = 3$
2. **Vértice:** $x_v = -\frac{2}{2(-1)} = 1$, $y_v = g(1) = -1 + 2 + 3 = 4$ Vértice: $(1, 4)$
3. **Raízes:** $\Delta = 4 - 4(-1)(3) = 4 + 12 = 16$ $x = \frac{-2 \pm 4}{-2} = -1$ ou 3
4. **Pontos importantes:**

x	$g(x) = -x^2 + 2x + 3$	Ponto (x, y)
-2	-7	$(-2, -7)$
-1	0	$(-1, 0)$
0	3	$(0, 3)$
1	4	$(1, 4)$
2	3	$(2, 3)$
3	0	$(3, 0)$
4	-5	$(4, -5)$

5. **Características:**
   - Vértice: $(1, 4)$ (ponto de máximo)
   - Raízes: $x = -1$ e $x = 3$
   - Eixo de simetria: $x = 1$
   - Imagem: $(-\infty, 4]$



Comparação entre as Parábolas:

- **Concavidade:** A primeira ($a > 0$) abre para cima; a segunda ($a < 0$) abre para baixo
- **Vértice:** Ponto de mínimo vs. ponto de máximo
- **Imagem:** Limitada inferiormente vs. limitada superiormente

2.1.7 Estudo de Sinal Avançado

Método Gráfico para Inequações

O estudo de sinal pode ser feito graficamente:

1. **Desenhar** o gráfico da função
2. **Identificar** onde a função é positiva/negativa
3. **Relacionar** com a inequação desejada
4. **Escrever** a solução em forma de intervalos

Exemplo: Sistema de Inequações

Problema: Resolva o sistema:

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \quad (2.1)$$
$$-x^2 + x + 2 \geq 0 \quad (2.2)$$

Solução:
Inequação 1: $x^2 - 5x + 6 < 0$

1. Raízes: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$
2. Como $a = 1 > 0$, a parábola abre para cima
3. Solução: $x \in (2, 3)$

Inequação 2: $-x^2 + x + 2 \geq 0$

1. Multiplicar por -1: $x^2 - x - 2 \leq 0$
2. Raízes: $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 2$
3. Como $a = 1 > 0$, queremos onde a parábola está abaixo do eixo x
4. Solução: $x \in [-1, 2]$

Intersecção das soluções:

$$(2, 3) \cap [-1, 2] = \{2\}$$

Resposta: $S = \{2\}$

2.1.8 Aplicações e Problemas de Otimização

Problemas de Máximo e Mínimo

A função quadrática é fundamental em problemas de otimização:

- **Área máxima** com perímetro fixo
- **Lucro máximo** em problemas econômicos
- **Movimento de projéteis** (altura máxima)
- **Problemas geométricos** diversos

Exemplo: Problema de Otimização

Problema: Um fazendeiro quer cercar um terreno retangular usando 100 metros de cerca. Um dos lados do terreno será uma parede já existente, não precisando de cerca. Qual deve ser as dimensões do terreno para que a área seja máxima?

Solução:

1. **Definir variáveis:** Seja x a largura do terreno (perpendicular à parede) e y o comprimento (paralelo à parede).
2. **Restrição:** Cerca necessária: $2x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - 2x$
3. **Função a maximizar:** Área: $A(x) = x \cdot y = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$
4. **Encontrar o máximo:** $A(x) = -2x^2 + 100x$ (função quadrática com $a = -2 < 0$)
$$x_{max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-2)} = 25$$
5. **Dimensões ótimas:** $x = 25$ m, $y = 100 - 2(25) = 50$ m
6. **Área máxima:** $A_{max} = 25 \times 50 = 1250$ mš
7. **Resposta:**
$$\boxed{\text{Dimensões: } 25 \text{ m} \times 50 \text{ m, Área máxima: } 1250 \text{ m}^2}$$

2.1.9 Formas Especiais e Casos Complexos

Equações Biquadradas

Equações do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ podem ser resolvidas por substituição:
Método:

1. Fazer $u = x^2$
2. Resolver $au^2 + bu + c = 0$
3. Encontrar $x = \pm\sqrt{u}$ para cada solução $u \geq 0$

Exemplo: Equação Biquadrada

Problema: Resolva $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Solução:

1. **Substituição:** $u = x^2$
$$u^2 - 5u + 4 = 0$$
2. **Resolver a equação em u:**
$$(u - 4)(u - 1) = 0 \Rightarrow u = 4 \text{ ou } u = 1$$
3. **Voltar para x:**
   - Se $u = 4$: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
   - Se $u = 1$: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
4. **Resposta:**
$$\boxed{S = \{-2, -1, 1, 2\}}$$

Exercícios

1. Determine os valores de k para que a equação $x^2 - 4x + k = 0$ tenha duas raízes reais e distintas.

   Solução:

   Para duas raízes reais e distintas, é necessário que $\Delta > 0$.

   $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(k) = 16 - 4k$

   Condição: $16 - 4k > 0$ $16 > 4k$ $k < 4$

   Resposta: $k \in (-\infty, 4)$.

2. Resolva a inequação $(x - 1)(x + 3) \leq 2x + 1$.

   Solução:

   Desenvolvendo o lado esquerdo: $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$

   Reorganizando a inequação: $x^2 + 2x - 3 \leq 2x + 1$ $x^2 + 2x - 3 - 2x - 1 \leq 0$ $x^2 - 4 \leq 0$

   Fatorando: $(x - 2)(x + 2) \leq 0$

   Estudo de sinal: Raízes: $x = -2$ e $x = 2$ Como $a = 1 > 0$, a parábola abre para cima. A função é negativa entre as raízes.

   Resposta: $S = [-2, 2]$.

3. Uma bola é lançada verticalmente para cima. Sua altura h (em metros) em função do tempo t (em segundos) é dada por $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$. Determine: a) A altura máxima atingida b) O tempo para atingir a altura máxima c) Quando a bola toca o solo

   Solução:

a) Altura máxima: $a = -5$, $b = 20$, $c = 1$ $t_{max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-5)} = 2$ s $h_{max} = h(2) = -5(4) + 20(2) + 1 = -20 + 40 + 1 = 21$ m

b) Tempo para altura máxima: $t = 2$ s

c) Quando toca o solo ($h = 0$): $-5t^2 + 20t + 1 = 0$ $\Delta = 400 + 20 = 420$ $t = \frac{-20\pm\sqrt{420}}{-10} = \frac{-20\pm2\sqrt{105}}{-10}$

Como $t > 0$: $t = \frac{20+2\sqrt{105}}{10} = 2 + \frac{\sqrt{105}}{5} \approx 4{,}05$ s

Resposta: a) Altura máxima: 21 m b) Tempo para altura máxima: 2 s c) Tempo para tocar o solo: $2 + \frac{\sqrt{105}}{5}$ s $\approx 4{,}05$ s

4. Determine a forma fatorada de $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ e esboce seu gráfico identificando todos os elementos importantes.

   Solução:

   Encontrando as raízes: $\Delta = 9 + 16 = 25$ $x = \frac{3\pm5}{4} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}$

   Forma fatorada: $f(x) = 2(x-2)(x+\frac{1}{2}) = 2(x-2)\cdot\frac{2x+1}{2} = (x-2)(2x+1)$

   Elementos do gráfico:

   - Raízes: $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 2$
   - Vértice: $x_v = \frac{3}{4}$, $y_v = f(\frac{3}{4}) = -\frac{25}{8}$
   - Intersecção com eixo y: $(0, -2)$
   - Concavidade: para cima ($a = 2 > 0$)
   - Imagem: $[-\frac{25}{8}, +\infty)$

   Resposta: $f(x) = (x-2)(2x+1)$

2.2 Módulo de um número real

O **módulo** (ou **valor absoluto**) de um número real é uma função que associa a cada número real a sua distância até a origem na recta numérica. É representado por $|x|$ e sempre resulta em um valor não-negativo.

Definição

O módulo de um número real permite:

- **Medir** a distância de qualquer número real até zero.
- **Eliminar** o sinal negativo de números, mantendo apenas sua magnitude.
- **Resolver** problemas envolvendo distâncias na reta real.
- **Definir** funções importantes como a função modular.

2.2.1 Definição e Propriedades

Definição Formal do Módulo

Para qualquer número real x, o módulo de x é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Interpretação geométrica: O módulo de x representa a distância do ponto x até a origem na reta numérica.

Exemplos básicos:

- $|5| = 5$ (pois $5 > 0$)
- $|-3| = -(-3) = 3$ (pois $-3 < 0$)
- $|0| = 0$ (caso especial)

Propriedades Fundamentais

Para números reais a e b, valem as seguintes propriedades:

1. **Não-negatividade:** $|a| \geq 0$
2. **Definida positiva:** $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. **Simetria:** $|-a| = |a|$
4. **Multiplicativa:** $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
5. **Divisão:** $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (para $b \neq 0$)
6. **Desigualdade triangular:** $|a + b| \leq |a| + |b|$
7. **Desigualdade reversa:** $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Exemplo: Aplicando as Propriedades

Problema: Demonstre que $|3 \cdot (-4)| = |3| \cdot |-4|$ e calcule o resultado.

Solução:

1. **Lado esquerdo:**
$$|3 \cdot (-4)| = |-12| = 12$$
2. **Lado direito:**
$$|3| \cdot |-4| = 3 \cdot 4 = 12$$
3. **Verificação:**
$$|3 \cdot (-4)| = |3| \cdot |-4| = 12$$

4. **Resposta:**

$$\boxed{\text{A propriedade multiplicativa é confirmada: } 12 = 12}$$

2.2.2 Equações Modulares

Tipos de Equações Modulares

As equações modulares envolvem expressões com módulo e podem ter diferentes formas:

1. **Forma básica:** $|x| = a$
2. **Forma geral:** $|f(x)| = g(x)$
3. **Forma com dois módulos:** $|f(x)| = |g(x)|$

Resolução de $|x| = a$

Para resolver a equação $|x| = a$:

- Se $a < 0$: **não há solução** (módulo nunca é negativo)
- Se $a = 0$: $x = 0$ (solução única)
- Se $a > 0$: $x = a$ ou $x = -a$ (duas soluções)

Em geral: $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$ (para $a \geq 0$)

Exemplo: Resolvendo Equações Modulares

Problema: Resolva as equações: (a) $|x - 3| = 5$; (b) $|2x + 1| = -2$; (c) $|x^2 - 4| = 5$

Soluções:
(a) $|x - 3| = 5$

1. Aplicar a definição: $x - 3 = 5$ ou $x - 3 = -5$
2. Resolver: $x = 8$ ou $x = -2$
3. **Resposta:** $S = \{-2, 8\}$

(b) $|2x + 1| = -2$

1. Como o módulo nunca é negativo e $-2 < 0$
2. **Resposta:** $S = \emptyset$ (conjunto vazio)

(c) $|x^2 - 4| = 5$

1. Aplicar a definição: $x^2 - 4 = 5$ ou $x^2 - 4 = -5$
2. Caso 1: $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$
3. Caso 2: $x^2 = -1$ (impossível em $\mathbb{R}$)
4. **Resposta:** $S = \{-3, 3\}$

2.2.3 Funções Modulares

Função Modular Básica

A função modular mais simples é:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Características:

- Domínio: $\mathbb{R}$
- Contradomínio: $[0, +\infty)$
- É uma função par: $f(-x) = f(x)$
- Possui formato de "V"

Exemplo: Analisando Funções Modulares

Problema: Analise a função $f(x) = |x - 2| + 1$ e determine suas características.

Solução:

1. **Reescrevendo a função:**

$$f(x) = |x - 2| + 1 = \begin{cases} (x - 2) + 1 = x - 1, & \text{se } x \geq 2 \\ -(x - 2) + 1 = -x + 3, & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

2. **Características:**
   - **Domínio:** $\mathbb{R}$
   - **Imagem:** $[1, +\infty)$
   - **Vértice:** $(2, 1)$ (ponto de mudança da expressão)
   - **Crescimento:** Decrescente para $x < 2$ e crescente para $x > 2$

3. **Pontos importantes:**
   - $f(0) = |0 - 2| + 1 = 2 + 1 = 3$
   - $f(2) = |2 - 2| + 1 = 0 + 1 = 1$ (valor mínimo)
   - $f(4) = |4 - 2| + 1 = 2 + 1 = 3$

2.2.4 Transformações Modulares e Gráfico da Função Valor Absoluto

Transformações da Função Modular

A partir da função básica $f(x) = |x|$, podemos obter outras funções através de transformações:

Translação horizontal: $f(x) = |x - h|$ (desloca h unidades na horizontal)

Translação vertical: $f(x) = |x| + k$ (desloca k unidades na vertical)

Reflexão: $f(x) = -|x|$ (reflete em relação ao eixo x)

Dilatação/Compressão: $f(x) = a|x|$ (altera a "abertura"do V)

Forma geral: $f(x) = a|x - h| + k$

Análise da Função $f(x) = a|x - h| + k$

Para a função modular geral:

- **Vértice:** (h, k)
- **Eixo de simetria:** $x = h$
- **Domínio:** $\mathbb{R}$
- **Imagem:**
  - Se $a > 0$: $[k, +\infty)$
  - Se $a < 0$: $(-\infty, k]$
- **Comportamento:**
  - Se $a > 0$: V voltado para cima (valor mínimo em $x = h$)
  - Se $a < 0$: V voltado para baixo (valor máximo em $x = h$)

Exemplo: Construindo o Gráfico

Problema: Construa o gráfico de $f(x) = -2|x + 1| + 3$ e determine suas características.

Solução:

1. **Identificar os parâmetros:** Comparando com $f(x) = a|x - h| + k$: $a = -2$, $h = -1$, $k = 3$
2. **Características da função:**
   - **Vértice:** $(-1, 3)$
   - **Eixo de simetria:** $x = -1$
   - **Domínio:** $\mathbb{R}$
   - **Imagem:** $(-\infty, 3]$ (pois $a < 0$)
   - **Concavidade:** Voltada para baixo (V invertido)
3. **Pontos para o gráfico:**
   - $f(-3) = -2|-3 + 1| + 3 = -2 \cdot 2 + 3 = -1$
   - $f(-2) = -2|-2 + 1| + 3 = -2 \cdot 1 + 3 = 1$
   - $f(-1) = -2|-1 + 1| + 3 = -2 \cdot 0 + 3 = 3$ (máximo)
   - $f(0) = -2|0 + 1| + 3 = -2 \cdot 1 + 3 = 1$
   - $f(1) = -2|1 + 1| + 3 = -2 \cdot 2 + 3 = -1$
4. **Descrição do gráfico:** V invertido com vértice em $(-1, 3)$, decrescente à esquerda e à direita do vértice.

2.2.5 Inequações Modulares

Resolução de Inequações Modulares

Para resolver inequações com módulo:
Tipo 1: $|x| < a$ (com $a > 0$)

$$-a < x < a$$

Tipo 2: $|x| > a$ (com $a > 0$)

$$x < -a \text{ ou } x > a$$

Tipo 3: $|f(x)| < g(x)$

$$-g(x) < f(x) < g(x) \text{ e } g(x) > 0$$

Exemplo: Resolvendo Inequações Modulares

Problema: Resolva as inequações: (a) $|x - 1| \leq 3$; (b) $|2x + 3| > 5$

Soluções:
(a) $|x - 1| \leq 3$

1. Aplicar a definição: $-3 \leq x - 1 \leq 3$
2. Somar 1 a todos os membros: $-3 + 1 \leq x \leq 3 + 1$
3. **Resposta:** $-2 \leq x \leq 4$ ou $S = [-2, 4]$

(b) $|2x + 3| > 5$

1. Aplicar a definição: $2x + 3 < -5$ ou $2x + 3 > 5$
2. Resolver cada inequação:
   - $2x < -8 \Rightarrow x < -4$
   - $2x > 2 \Rightarrow x > 1$
3. **Resposta:** $x < -4$ ou $x > 1$, ou seja, $S = (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$

2.2.6 Construção de Gráficos - Exemplos Visuais

Gráfico 1: Função $f(x) = |x|$ (Função Modular Básica)

Construção Passo a Passo:

1. **Analisar a definição:**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2. **Calcular pontos importantes:**

x	$\|x\|$	Ponto (x, y)
-3	3	$(-3, 3)$
-2	2	$(-2, 2)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	2	$(2, 2)$
3	3	$(3, 3)$

3. **Características do gráfico:**
   - Vértice na origem $(0, 0)$
   - Formato de "V"
   - Função par (simétrica em relação ao eixo y)
   - Decrescente para $x < 0$ e crescente para $x > 0$

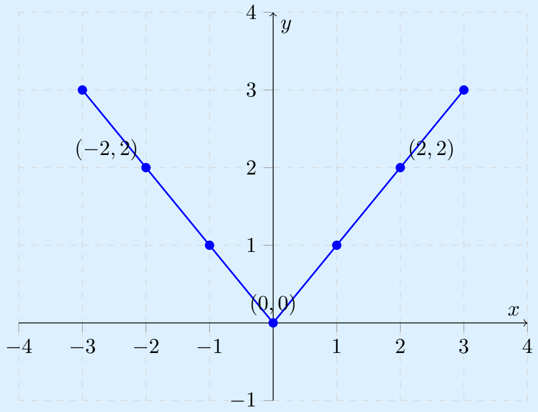


Gráfico 2: Função $g(x) = |x - 2| + 1$ (Função Modular Transformada)

Construção Passo a Passo:

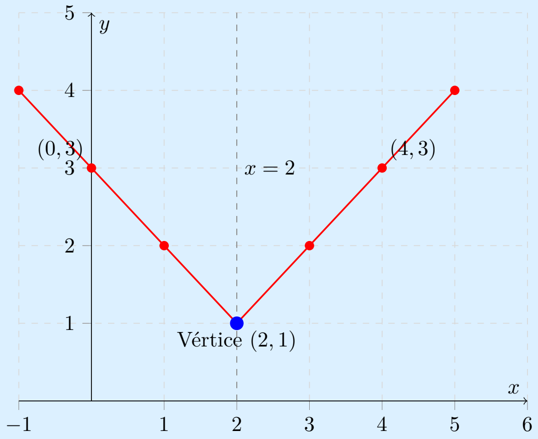
1. **Identificar as transformações:** A partir de $f(x) = |x|$, temos:
   - Translação horizontal: 2 unidades para a direita
   - Translação vertical: 1 unidade para cima
2. **Reescrever por partes:**

$$g(x) = |x-2| + 1 = \begin{cases} -(x-2)+1 = -x+3, & \text{se } x < 2 \\ (x-2)+1 = x-1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

3. **Calcular pontos importantes:**

x	$x-2$	$\|x-2\|$	$g(x) = \|x-2\|+1$
-1	-3	3	4
0	-2	2	3
1	-1	1	2
2	0	0	1
3	1	1	2
4	2	2	3
5	3	3	4

4. **Características do gráfico:**
   - Vértice em $(2, 1)$
   - Formato de "V"
   - Eixo de simetria: $x = 2$
   - Valor mínimo: $y = 1$
   - Domínio: $\mathbb{R}$, Imagem: $[1, +\infty)$



Comparação com $f(x) = |x|$:

- O gráfico de $g(x) = |x-2| + 1$ é o gráfico de $f(x) = |x|$ deslocado 2 unidades à direita e 1 unidade para cima
- O vértice mudou de $(0, 0)$ para $(2, 1)$
- A forma do "V"permanece inalterada

2.2.7 Exercícios Resolvidos

Exercícios

1. Resolva a equação $|x^2 - 5x + 6| = 0$.

   Solução:

   Para que o módulo seja zero, a expressão dentro deve ser zero:

   $$x^2 - 5x + 6 = 0$$

   Fatorando: $(x-2)(x-3) = 0$

   Portanto: $x = 2$ ou $x = 3$

   Resposta: $S = \{2, 3\}$.

2. Determine o domínio da função $f(x) = \frac{1}{|x-2|-3}$.

   Solução:

   Para que a função esteja definida, o denominador deve ser diferente de zero:

   $$|x-2| - 3 \neq 0 \Rightarrow |x-2| \neq 3$$

   Resolvendo $|x-2| = 3$: $x - 2 = 3$ ou $x - 2 = -3$ $x = 5$ ou $x = -1$

   Resposta: $D = \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ ou $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 5) \cup (5, +\infty)$.

3. Resolva a inequação $|3x - 6| \leq 9$.

   Solução:

   Aplicando a definição de módulo:

   $$-9 \leq 3x - 6 \leq 9$$

   Somando 6 a todos os membros:

   $$-3 \leq 3x \leq 15$$

   Dividindo por 3:

   $$-1 \leq x \leq 5$$

   Resposta: $S = [-1, 5]$.

4. Analise a função $g(x) = |x| - |x-4|$ e esboce seu gráfico.

   Solução:

   Análise por intervalos:

   Para $x < 0$: $|x| = -x$ e $|x-4| = -(x-4) = 4 - x$

   $$g(x) = -x - (4 - x) = -x - 4 + x = -4$$

   Para $0 \leq x < 4$: $|x| = x$ e $|x-4| = -(x-4) = 4 - x$

   $$g(x) = x - (4 - x) = x - 4 + x = 2x - 4$$

Para $x \geq 4$**:** $|x| = x$ e $|x-4| = x-4$

$$g(x) = x - (x-4) = x - x + 4 = 4$$

Função final:

$$g(x) = \begin{cases} -4, & \text{se } x < 0 \\ 2x-4, & \text{se } 0 \leq x < 4 \\ 4, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

Gráfico: Função constante igual a -4 para $x < 0$, reta crescente $2x-4$ para $0 \leq x < 4$, e constante igual a 4 para $x \geq 4$.

2.3 Matrizes e Sistemas de Equações

Uma **matriz** é uma organização retangular de números dispostos em linhas horizontais e colunas verticais. As matrizes são fundamentais para resolver sistemas de equações lineares e têm aplicações em diversas áreas da matemática e ciências.

Definição de Matriz

Uma matriz **A** de ordem $m \times n$ (m linhas e n colunas) é representada como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Onde a_{ij} representa o elemento da linha i e coluna j.

2.3.1 Formando Matrizes a partir de Sistemas

Dado um sistema de equações lineares, podemos formar diferentes tipos de matrizes:

Sistema Linear e suas Matrizes

Considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 7 \\ x - 2y + 4z = -3 \\ 3x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes (A):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz das variáveis (X):

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matriz dos termos independentes (B):

$$B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada ou aumentada (A|B):

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

O sistema pode ser escrito na forma matricial como: $AX = B$

2.3.2 Operações com Matrizes

Adição e Subtração de Matrizes

Duas matrizes A e B de mesma ordem podem ser somadas ou subtraídas:

$$(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Condição: As matrizes devem ter a mesma ordem (mesmo número de linhas e colunas).

Multiplicação de Matrizes

Para multiplicar duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$, o elemento c_{ij} da matriz produto $C = AB$ é:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Condição: O número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda.

Operações com Matrizes

Sejam as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Adição:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Subtração:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Multiplicação:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8 \\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

2.3.3 Cálculo de Determinantes

Determinante de Matriz 2Œ2

Para uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = ad - bc$$

Determinante de Matriz 3×3 (Regra de Sarrus)

Para uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Método prático: Repetir as duas primeiras colunas à direita e calcular os produtos das diagonais.

Cálculo de Determinantes

Determinante 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 3\cdot4 - 2\cdot1 = 12 - 2 = 10$$

Determinante 3×3:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Aplicando a regra de Sarrus:

$$\det(B) = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7 - 1\cdot6\cdot8 - 2\cdot4\cdot9$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0$$

2.3.4 Classificação de Sistemas

Regra de Cramer

Para um sistema $AX = B$ onde A é quadrada:

- Se $\det(A) \neq 0$: Sistema **possível e determinado** (única solução)
- Se $\det(A) = 0$: O sistema pode ser **impossível** ou **indeterminado**

Quando $\det(A) \neq 0$, a solução é:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Onde A_i é a matriz obtida substituindo a coluna i de A pela matriz B.

Aplicação da Regra de Cramer

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Determinante de A:

$$\det(A) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 6 - 1 = 5 \neq 0$$

Como $\det(A) \neq 0$, o sistema tem solução única.
Para encontrar x:

$$A_x = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_x) = 5 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 11$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{11}{5}$$

Para encontrar y:

$$A_y = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_y) = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 3$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{3}{5}$$

Solução: $\boxed{x = \frac{11}{5} \text{ e } y = \frac{3}{5}}$

2.4 Equações Polinomiais

2.4.1 Equações Redutíveis a Quadráticas

Muitas equações polinomiais de grau superior podem ser transformadas em equações do 2ž grau através de substituições adequadas.

Método de Substituição

Para equações da forma $f(g(x)) = 0$, onde f é uma função quadrática:

1. Fazer a substituição $u = g(x)$
2. Resolver a equação quadrática em u
3. Substituir de volta e resolver para x

Equação Redutível a Quadrática

Resolver: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
Passo 1: Fazer a substituição $u = x^2$

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

Passo 2: Resolver a equação quadrática em u

$$u = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$u_1 = 4 \quad \text{ou} \quad u_2 = 1$$

Passo 3: Substituir de volta

- Se $u_1 = 4$, então $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
- Se $u_2 = 1$, então $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Solução: $\boxed{x = -2, -1, 1, 2}$

2.4.2 Equações Biquadradas

Definição

Uma equação **biquadrada** tem a forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Nota-se que não há termos com potências ímpares de x.

Equação Biquadrada

Resolver: $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$
Substituição: $u = x^2$

$$3u^2 - 7u + 2 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara:

$$u = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

$$u_1 = 2 \quad \text{ou} \quad u_2 = \frac{1}{3}$$

Voltando para x:

- Se $u_1 = 2$, então $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$
- Se $u_2 = \frac{1}{3}$, então $x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Solução: $\boxed{x = \pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}}$

2.4.3 Equações do terceiro Grau

Métodos para Equações Cúbicas

Para resolver equações do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$:

1. **Tentativa com divisores do termo independente**
2. **Fatoração por agrupamento**

3. **Dispositivo prático de Briot-Ruffini**
4. **Produtos notáveis** (quando aplicável)

Equação do 3ž Grau - Método da Tentativa

Resolver: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
Passo 1: Identificar possíveis raízes racionais (divisores de 6) Candidatos: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
Passo 2: Testar $x = 1$

$$1^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

Logo, $x = 1$ é raiz.
Passo 3: Fatorar usando $(x-1)$ Dividindo $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ por $(x-1)$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

Passo 4: Resolver $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$
$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

Solução: $\boxed{x = 1, 2, 3}$

2.4.4 Existência de Raízes Reais

Teoremas Fundamentais

- **Teorema Fundamental da Álgebra:** Todo polinômio de grau n possui exatamente n raízes complexas (contando multiplicidades).
- **Para polinômios com coeficientes reais:** As raízes complexas não reais aparecem aos pares conjugados.
- **Regra dos Sinais de Descartes:** O número de raízes positivas de um polinômio é igual ao número de variações de sinais dos coeficientes, ou difere dele por um número par.

Análise de Raízes Reais

Analisar as raízes de $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
Variações de sinal: Coeficientes: $+1, -2, -1, +2$ Sequência de sinais: $+, -, -, +$ Variações: $+ \to -$ (1ł), $- \to +$ (2ł)
Logo, há **2 ou 0** raízes positivas.
Para P(-x): $P(-x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$ Coeficientes: $-1, -2, +1, +2$ Sequência: $-, -, +, +$ Variações: $- \to +$ (1 variação)
Logo, há **1** raiz negativa.
Tentativa com divisores de 2: Testando $x = 1$: $P(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$
Fatorando: $P(x) = (x-1)(x^2 - x - 2) = (x-1)(x-2)(x+1)$
Raízes: $\boxed{x = -1, 1, 2}$ (todas reais)

Exercícios

1. Calcule o determinante da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Solução: Aplicando a regra de Sarrus:

$$\det(A) = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 2$$
$$= 16 + 1 + 0 - 12 - 4 - 0 = 1$$

2. Resolva a equação: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Solução: Fazendo $u = x^2$:

$$u^2 - 10u + 9 = 0$$

Por fatoração: $(u-1)(u-9) = 0$ Logo: $u = 1$ ou $u = 9$

Voltando para x:

- Se $u = 1$, então $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- Se $u = 9$, então $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Resposta: $x = -3, -1, 1, 3$

3. Encontre todas as raízes de: $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

Solução: Tentando fatores de 4: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Testando $x = 2$: $2^3 + 2^2 - 4(2) - 4 = 8 + 4 - 8 - 4 = 0$

Dividindo por $(x-2)$:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x-2)(x^2 + 3x + 2)$$

Fatorando $x^2 + 3x + 2$:

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

Portanto:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x-2)(x+1)(x+2)$$

Raízes: $x = -2, -1, 2$

2.5 Expressões algébricas

As **expressões algébricas** são combinações de números, variáveis, operações matemáticas e funções. O estudo do seu **domínio de existência** é fundamental para determinar onde essas expressões fazem sentido matematicamente.

Definição

Uma expressão algébrica pode conter:

- **Variáveis** (como x, y, t)
- **Números** (constantes)
- **Operações básicas** (+, -, ×, ÷)
- **Funções especiais** (raiz, logaritmo, módulo)

O **domínio de existência** é o conjunto de todos os valores que a variável pode assumir para que a expressão seja matematicamente definida.

2.5.1 Classificação das Expressões Algébricas

Tipos de Expressões Algébricas

As expressões algébricas podem ser classificadas de acordo com suas características estruturais:

- **Expressões Racionais -** Envolvem apenas operações básicas
- **Expressões Irracionais -** Contêm radicais ou potências fracionárias
- **Expressões Transcendentes -** Incluem funções transcendentes

Expressões Racionais

Definição: Expressões que envolvem apenas as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação com expoentes inteiros.
Subdivisões:
1. Expressões Racionais Inteiras (Polinomiais):

- Não possuem variável no denominador
- Exemplos: $3x^2 + 2x - 1$, $x^4 - 5x^3 + 2$
- Forma geral: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

2. Expressões Racionais Fracionárias:

- Possuem variável no denominador
- Exemplos: $\frac{x+1}{x-2}$, $\frac{3x^2-1}{x^3+x}$
- Forma geral: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios

Expressões Irracionais

Definição: Expressões que contêm radicais com variáveis no radicando ou potências com expoentes fracionários.
Tipos:
1. Com Radicais:

- Exemplos: $\sqrt{x+1}$, $\sqrt[3]{x^2-4}$, $\sqrt{x} + \sqrt{x-1}$
- Forma geral: $\sqrt[n]{f(x)}$ onde $f(x)$ contém a variável

2. Com Expoentes Fracionários:

- Exemplos: $x^{1/2}$, $(x+1)^{2/3}$, $x^{3/4} - 2x^{1/3}$
- Forma geral: $x^{p/q}$ onde p, q são inteiros e $q \neq 1$

3. Mistas:

- Combinam partes racionais e irracionais
- Exemplos: $x + \sqrt{x}$, $\frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$

Expressões Transcendentes

Definição: Expressões que contêm funções transcendentes (não algébricas).
Principais Tipos:
1. Exponenciais:

- Exemplos: 2^x, e^{x+1}, 3^{x^2}
- Variável no expoente

2. Logarítmicas:

- Exemplos: $\log x$, $\ln(x+1)$, $\log_2(x^2-1)$
- Variável como argumento do logaritmo

3. Trigonométricas:

- Exemplos: $\sin x$, $\cos(2x+1)$, $\tan(x^2)$
- Funções trigonométricas da variável

4. Trigonométricas Inversas:

- Exemplos: $\arcsin x$, $\arccos(x-1)$, $\arctan(2x)$
- Funções trigonométricas inversas

Exemplo: Classificação de Expressões

Classifique as seguintes expressões:

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ **Classificação:** Racional Inteira (Polinomial) **Justificativa:** Apenas operações básicas, sem variável no denominador
2. $g(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$ **Classificação:** Racional Fracionária **Justificativa:** Variável presente no denominador
3. $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ **Classificação:** Irracional **Justificativa:** Contém radical com variável no radicando
4. $p(x) = x^{2/3} + 1$ **Classificação:** Irracional **Justificativa:** Expoente fracionário
5. $q(x) = 2^x + \log x$ **Classificação:** Transcendente **Justificativa:** Contém função exponencial e logarítmica
6. $r(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+1}$ **Classificação:** Irracional **Justificativa:** Presença de radical (parte mais "complexa")
7. $s(x) = \sin x + x^2$ **Classificação:** Transcendente **Justificativa:** Contém função trigonométrica

Hierarquia de Classificação

Quando uma expressão combina diferentes tipos, classifica-se pelo tipo mais "elevado":

$$\textbf{Racional Inteira} < \textbf{Racional Fracionária} < \textbf{Irracional} < \textbf{Transcendente}$$

Regra Prática:

- Se contém função transcendente **Transcendente**

- Se contém radical ou expoente fracionário **Irracional**
- Se contém variável no denominador **Racional Fracionária**
- Caso contrário **Racional Inteira**

2.5.2 Cálculo de Domínio - Conceitos Fundamentais

Restrições Principais

Para determinar o domínio, devemos identificar onde a expressão **NÃO** existe:

1. **Denominador zero:** $\frac{1}{g(x)} \Rightarrow g(x) \neq 0$
2. **Raiz par de número negativo:** $\sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$ (se n é par)
3. **Logaritmo de número não-positivo:** $\log f(x) \Rightarrow f(x) > 0$
4. **Base de logaritmo inválida:** $\log_a f(x) \Rightarrow a > 0$ e $a \neq 1$

Funções Polinomiais: Domínio sempre $\mathbb{R}$ (não há restrições)

Funções Racionais: Excluir zeros do denominador

Funções com Radicais: Radicando deve ser não-negativo (raízes pares)

Funções Logarítmicas: Argumento deve ser positivo

Funções com Módulo: Sempre definidas, mas podem criar restrições em composições

2.5.3 Domínio com Denominadores

Exemplo: Função Racional Simples

Problema: Determine o domínio de $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$.

Solução:

1. **Identificar a restrição:** O denominador não pode ser zero: $x^2 - 4 \neq 0$
2. **Resolver a equação:**
$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$
3. **Excluir os valores problemáticos:** $x \neq 2$ e $x \neq -2$
4. **Escrever o domínio:**
$$D = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$
5. **Resposta:**
$$\boxed{D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}}$$

Exemplo: Função Racional Complexa

Problema: Determine o domínio de $g(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x^2-1)} + \frac{2}{x^2-9}$.

Solução:

1. **Analisar cada denominador:**
Primeiro termo: $(x+3)(x^2-1) = (x+3)(x-1)(x+1)$ Zeros: $x = -3$, $x = 1$, $x = -1$
Segundo termo: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ Zeros: $x = 3$, $x = -3$
2. **Reunir todas as restrições:** Valores que tornam algum denominador zero: $x \in \{-3, -1, 1, 3\}$

3. **Domínio:**
$$D = \mathbb{R} - \{-3, -1, 1, 3\}$$

4. **Em notação de intervalos:**
$$\boxed{D = (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)}$$

2.5.4 Domínio com Raízes

Regras para Radicais

Raiz de Índice Par: $\sqrt[2n]{f(x)}$ existe se e somente se $f(x) \geq 0$
Raiz de Índice Ímpar: $\sqrt[2n+1]{f(x)}$ existe para todo $f(x) \in \mathbb{R}$
Casos Especiais:

- $\sqrt{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$
- $\sqrt[4]{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$
- $\sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow$ sem restrições
- $\sqrt[5]{f(x)} \Rightarrow$ sem restrições

Exemplo: Função com Raiz Quadrada

Problema: Determine o domínio de $h(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

Solução:

1. **Condição para existência:** $x^2 - 5x + 6 \geq 0$
2. **Fatorar a expressão:** $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$
3. **Estudar o sinal:**

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$(x - 2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x - 3)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

4. **Solução da inequação:** $f(x) \geq 0$ quando $x \leq 2$ ou $x \geq 3$
5. **Resposta:**
$$\boxed{D = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)}$$

Exemplo: Raiz no Denominador

Problema: Determine o domínio de $k(x) = \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Solução:

1. **Duas restrições simultâneas:**
   - **Raiz existe:** $4 - x^2 \geq 0$
   - **Denominador não é zero:** $\sqrt{4 - x^2} \neq 0$
2. **Combinar as condições:** $4 - x^2 > 0$ (estritamente positivo)
3. **Resolver a inequação:** $4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$
4. **Resposta:**
$$\boxed{D = (-2, 2)}$$

2.5.5 Domínio com Logaritmos

Condições para Logaritmos

Logaritmo Natural: $\ln f(x)$ existe se e somente se $f(x) > 0$
Logaritmo com Base: $\log_a f(x)$ existe se e somente se:

- $f(x) > 0$ (argumento positivo)
- $a > 0$ e $a \neq 1$ (base válida)

Base Variável: $\log_{g(x)} f(x)$ requer:

- $f(x) > 0$
- $g(x) > 0$ e $g(x) \neq 1$

Exemplo: Função Logarítmica Simples

Problema: Determine o domínio de $p(x) = \log(2x - 6) + \ln(x + 1)$.

Solução:

1. **Condições para cada logaritmo:**
   Para $\log(2x - 6)$**:** $2x - 6 > 0$ $2x > 6 \Rightarrow x > 3$
   Para $\ln(x + 1)$**:** $x + 1 > 0$ $x > -1$
2. **Intersecção das condições:** Precisamos que ambas sejam satisfeitas simultaneamente: $x > 3$ E $x > -1$
3. **Condição mais restritiva:** $x > 3$ (pois se $x > 3$, então automaticamente $x > -1$)
4. **Resposta:**

$$\boxed{D = (3, +\infty)}$$

Exemplo: Logaritmo com Base Variável

Problema: Determine o domínio de $q(x) = \log_{x-1}(x + 3)$.

Solução:

1. **Condições necessárias:**
   Para o argumento: $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$
   Para a base: $x - 1 > 0$ e $x - 1 \neq 1$ $x > 1$ e $x \neq 2$
2. **Combinar todas as condições:** $x > -3$ E $x > 1$ E $x \neq 2$
3. **Simplificar:** Como $x > 1$ é mais restritivo que $x > -3$: $x > 1$ e $x \neq 2$
4. **Resposta:**

$$\boxed{D = (1, 2) \cup (2, +\infty)}$$

2.5.6 Restrições com Valor Absoluto

Valor Absoluto e Domínio

O valor absoluto em si não cria restrições de domínio, mas pode aparecer em situações que geram restrições:

$\lvert f(x)\rvert$**:**	Sem restrições adicionais
$\sqrt{\lvert f(x)\rvert}$**:**	Sempre existe ($\lvert f(x)\rvert \geq 0$)
$\frac{1}{\lvert f(x)\rvert}$**:**	Requer $f(x) \neq 0$

$\log|f(x)|$**:** Requer $f(x) \neq 0$

Exemplo: Combinando Módulo e Logaritmo

Problema: Determine o domínio de $r(x) = \log|x^2 - 4|$.

Solução:

1. **Condição para o logaritmo:** $|x^2 - 4| > 0$
2. **Analisar quando $|x^2 - 4| = 0$:** $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$
3. **Como o módulo é sempre não-negativo:** $|x^2 - 4| > 0$ quando $x^2 - 4 \neq 0$
4. **Resposta:**

$$\boxed{D = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)}$$

2.5.7 Casos Complexos - Combinação de Restrições

Exemplo: Múltiplas Restrições

Problema: Determine o domínio de $s(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln(3-x)} + \log_2\left(\frac{x+2}{|x-4|}\right)$.

Solução:

1. **Analisar cada parte separadamente:**

   Para $\frac{\sqrt{x-1}}{\ln(3-x)}$:

   - $\sqrt{x-1}$: precisa $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$
   - $\ln(3-x)$: precisa $3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$
   - Denominador $\neq 0$: $\ln(3-x) \neq 0 \Rightarrow 3 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$

   Condições: $1 \leq x < 3$ e $x \neq 2$

   Para $\log_2\left(\frac{x+2}{|x-4|}\right)$:

   - $\frac{x+2}{|x-4|} > 0$
   - $|x-4| \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$

2. **Analisar o sinal de $\frac{x+2}{|x-4|}$:** Como $|x-4| > 0$ sempre (quando $x \neq 4$), o sinal depende de $x+2$: $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$
3. **Combinar todas as condições:**
   - Da primeira parte: $1 \leq x < 3$ e $x \neq 2$
   - Da segunda parte: $x > -2$ e $x \neq 4$
4. **Intersecção:** $[1, 2) \cup (2, 3)$ $(-2, 4) \cup (4, +\infty) = [1, 2) \cup (2, 3)$
5. **Resposta:**

$$\boxed{D = [1, 2) \cup (2, 3)}$$

2.5.8 Método Sistemático para Determinar Domínio

Algoritmo Geral

Passo 1: Identificar todos os tipos de restrições presentes

- Denominadores
- Raízes pares
- Logaritmos
- Outras funções especiais

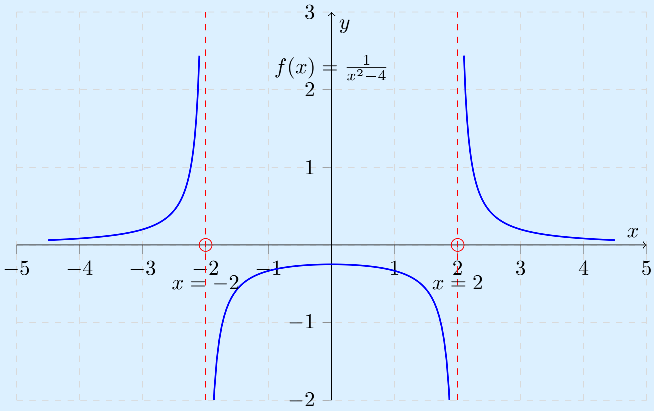
Passo 2: Escrever as inequações/equações para cada restrição
Passo 3: Resolver cada restrição individualmente
Passo 4: Encontrar a intersecção de todas as condições
Passo 5: Expressar o resultado final

2.5.9 Representações Gráficas do Domínio

Gráfico 1: Domínio de Função Racional - $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

Análise do Domínio:

1. **Restrição:** $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$
2. **Domínio:** $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
3. **Comportamento nos pontos excluídos:**
   - Em $x = -2$ e $x = 2$: assíntotas verticais
   - $\lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \pm\infty$
   - $\lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \pm\infty$



Características do Domínio:

- **Intervalos de definição:** $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
- **Pontos de descontinuidade:** $x = -2$ e $x = 2$
- **Comportamento:** Função tende ao infinito nas proximidades dos pontos excluídos

Gráfico 2: Domínio de Função com Raiz - $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Análise do Domínio:

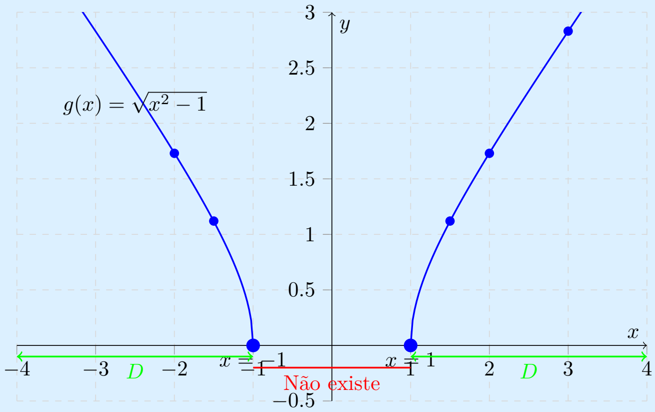
1. **Restrição:** $x^2 - 1 \geq 0$

2. **Resolução:** $(x-1)(x+1) \geq 0$

3. **Estudo de sinal:**

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

4. **Domínio:** $D = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$



Características do Domínio:

- **Intervalos de definição:** $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$
- **Pontos críticos:** $x = -1$ e $x = 1$ (onde a função vale zero)
- **Intervalo excluído:** $(-1,1)$ onde $x^2 - 1 < 0$
- **Comportamento:** Função cresce à medida que $|x|$ aumenta

2.5.10 Funções Compostas e Domínio

Domínio de Funções Compostas

Para $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, o domínio é determinado por:

1. x deve pertencer ao domínio de g
2. $g(x)$ deve pertencer ao domínio de f

Simbolicamente: $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$

Exemplo: Função Composta Complexa

Problema: Determine o domínio de $h(x) = \sqrt{\log(x-1)}$.

Solução:

1. **Identificar a composição:** $h(x) = f(g(x))$ onde $f(u) = \sqrt{u}$ e $g(x) = \log(x-1)$
2. **Domínio de $g(x) = \log(x-1)$:** $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ $D_g = (1,+\infty)$
3. **Domínio de $f(u) = \sqrt{u}$:** $u \geq 0$ $D_f = [0,+\infty)$
4. **Condição adicional:** Precisamos que $g(x) \in D_f$, ou seja: $\log(x-1) \geq 0$
5. **Resolver a inequação:** $\log(x-1) \geq 0 \Rightarrow x - 1 \geq 10^0 = 1 \Rightarrow x \geq 2$
6. **Combinar as condições:** $x > 1$ (domínio de g) E $x \geq 2$ (para que $g(x) \in D_f$)

7. **Resposta:**

$$\boxed{D = [2, +\infty)}$$

2.5.11 Análise de Casos Especiais

Situações Particulares

Alguns casos merecem atenção especial:

x^0: Indefinido para $x = 0$ (convenção: 0^0 é indeterminado)

$\sqrt[n]{x^m}$: Depende da paridade de n e do sinal de x

$\log_x a$: Base variável requer $x > 0$, $x \neq 1$ e $a > 0$

$\arcsin x$, $\arccos x$: Requerem $-1 \leq x \leq 1$

Exemplo: Função Trigonométrica Inversa

Problema: Determine o domínio de $p(x) = \arcsin\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$.

Solução:

1. **Condições necessárias:**
   Para o arcosseno: $-1 \leq \frac{2x-1}{x+1} \leq 1$
   Para a fração: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

2. **Resolver as inequações:**
   Inequação 1: $\frac{2x-1}{x+1} \geq -1$ $\frac{2x-1}{x+1} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \geq 0$
   Estudo de sinal: zeros em $x = 0$ e $x = -1$ Solução: $x \leq -1$ ou $x \geq 0$ (excluindo $x = -1$) Resultado: $x < -1$ ou $x \geq 0$
   Inequação 2: $\frac{2x-1}{x+1} \leq 1$ $\frac{2x-1}{x+1} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{2x-1-x-1}{x+1} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x+1} \leq 0$
   Estudo de sinal: zeros em $x = 2$ e $x = -1$ Solução: $-1 < x \leq 2$

3. **Intersecção das condições:** $(x < -1$ ou $x \geq 0)$ $(-1 < x \leq 2)$ $(x \neq -1)$
   Resultado: $[0, 2]$

4. **Resposta:**

$$\boxed{D = [0, 2]}$$

2.5.12 Exercícios Resolvidos

Exercícios

1. Determine o domínio de $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-3x-4}$.
   Solução:
   Restrições: 1) Para a raiz: $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$ 2) Para o denominador: $x^2 - 3x - 4 \neq 0$
   Resolvendo a equação do denominador: $x^2 - 3x - 4 = 0$ $\Delta = 9 + 16 = 25$ $x = \frac{3\pm5}{2} \Rightarrow x = 4$ ou $x = -1$
   Combinando as condições: $x \geq -2$ e $x \neq -1$ e $x \neq 4$
   Resposta: $D = [-2, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, +\infty)$.

2. Determine o domínio de $g(x) = \log_2(x^2 - 1) + \sqrt{5 - x}$.
   Solução:

Para $\log_2(x^2-1)$**:** $x^2-1>0$ $(x-1)(x+1)>0$ Solução: $x<-1$ ou $x>1$

Para $\sqrt{5-x}$**:** $5-x\geq 0$ $x\leq 5$

Intersecção: $(x<-1$ ou $x>1)$ $(x\leq 5)=(x<-1)\cup(1<x\leq 5)$

Resposta: $D=(-\infty,-1)\cup(1,5]$.

3. Determine o domínio de $h(x)=\frac{1}{\sqrt{|x-3|-2}}$.

   Solução:

   Para a raiz existir: $|x-3|-2>0$ (estritamente positivo pois está no denominador) $|x-3|>2$

   Resolvendo a inequação modular: $x-3>2$ ou $x-3<-2$ $x>5$ ou $x<1$

   Resposta: $D=(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$.

4. Analise o domínio de $k(x)=\sqrt[3]{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}+\log|x+2|$.

   Solução:

   Para $\sqrt[3]{x-1}$**:** Sem restrições (raiz ímpar)

   Para $\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$**:** - Raiz existe: $x^2-4>0$ (estritamente positivo) - $(x-2)(x+2)>0$ - Solução: $x<-2$ ou $x>2$

   Para $\log|x+2|$**:** $|x+2|>0$ - $x+2\neq 0\Rightarrow x\neq -2$

   Intersecção de todas as condições: Sem restrições $(x<-2$ ou $x>2)$ $(x\neq -2)=(x<-2)\cup(x>2)$ (pois $x\neq -2$ já está incluído)

   Resposta: $D=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

5. Determine o domínio da função composta $(f\circ g)(x)$ onde $f(t)=\sqrt{t-1}$ e $g(x)=\frac{x}{x-2}$.

   Solução:

   Domínio de $g(x)=\frac{x}{x-2}$**:** $x-2\neq 0\Rightarrow x\neq 2$ $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

   Domínio de $f(t)=\sqrt{t-1}$**:** $t-1\geq 0\Rightarrow t\geq 1$ $D_f=[1,+\infty)$

   Condição para $(f\circ g)(x)=f(g(x))$**:** Precisamos que $g(x)\in D_f$: $\frac{x}{x-2}\geq 1$

   Resolvendo: $\frac{x}{x-2}-1\geq 0$ $\frac{x-(x-2)}{x-2}\geq 0$ $\frac{2}{x-2}\geq 0$

   Como o numerador é positivo, precisamos $x-2>0$, ou seja, $x>2$.

   Intersecção final: D_g $x:g(x)\geq 1=(\mathbb{R}-\{2\})$ $(2,+\infty)=(2,+\infty)$

   Resposta: $D=(2,+\infty)$.

2.6 Função Exponencial

2.6.1 Definição da Função Exponencial

A **função exponencial** é uma das funções mais importantes da matemática, com aplicações em crescimento populacional, juros compostos, decaimento radioativo e muitos outros fenômenos naturais e econômicos.

Definição

A função exponencial é definida por:

- **Forma geral:** $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$
- **Domínio:** $\mathbb{R}$ (todos os números reais)
- **Contradomínio:** $(0, +\infty)$ (números reais positivos)
- **Base especial:** $f(x) = e^x$ (função exponencial natural)

Base $a > 1$: Função crescente

- a^x cresce à medida que x aumenta
- Exemplos: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$

Base $0 < a < 1$: Função decrescente

- a^x decresce à medida que x aumenta
- Exemplos: $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $k(x) = 0,5^x$

Número $e \approx 2,718$: Base natural

- Função exponencial natural: $f(x) = e^x$
- Derivada especial: $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

2.6.2 Propriedades da Função Exponencial

Propriedades Fundamentais

Para $a > 0$ e $a \neq 1$, a função $f(x) = a^x$ possui:

1. Propriedades Básicas:

- $a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$
- $a^1 = a$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

2. Leis dos Expoentes:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

3. Propriedades da Função:

- Sempre positiva: $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
- Injetiva: se $a^x = a^y$, então $x = y$
- Contínua em todo $\mathbb{R}$

Exemplo: Aplicando Propriedades

Problema: Simplifique as expressões: a) $\frac{2^{x+3} \cdot 2^{x-1}}{2^{2x}}$; b) $(3^{2x})^{1/2} \cdot 3^{-x}$

Solução:
a) $\frac{2^{x+3} \cdot 2^{x-1}}{2^{2x}}$

1. Aplicar $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ no numerador:
$$2^{x+3} \cdot 2^{x-1} = 2^{(x+3)+(x-1)} = 2^{2x+2}$$

2. Aplicar $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$:
$$\frac{2^{2x+2}}{2^{2x}} = 2^{(2x+2)-2x} = 2^2 = 4$$

b) $(3^{2x})^{1/2} \cdot 3^{-x}$

1. Aplicar $(a^m)^n = a^{mn}$:
$$(3^{2x})^{1/2} = 3^{2x \cdot 1/2} = 3^x$$

2. Aplicar $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$:
$$3^x \cdot 3^{-x} = 3^{x+(-x)} = 3^0 = 1$$

Respostas: a) 4; b) 1

2.6.3 Equações Exponenciais

Métodos de Resolução

1. **1. Igualar as Bases:** Se $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, então $f(x) = g(x)$
2. **Reduzir a uma Base Comum:** Expressar ambos os lados com a mesma base
3. **Substituição:** Para equações do tipo $a^{2x} + a^x - 2 = 0$, fazer $u = a^x$
4. **Logaritmar:** Aplicar logaritmo em ambos os lados
5. **Casos Especiais:**
   - $a^x = 1 \Rightarrow x = 0$ (se $a \neq 1$)
   - $a^x = a \Rightarrow x = 1$

Exemplo: Resolvendo Equações Exponenciais

Problema: Resolva as equações: a) $2^{x+1} = 8^{x-2}$; b) $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$
a) $2^{x+1} = 8^{x-2}$

1. Expressar na mesma base: $8 = 2^3$
$$2^{x+1} = (2^3)^{x-2} = 2^{3(x-2)} = 2^{3x-6}$$

2. Igualar os expoentes:
$$x + 1 = 3x - 6$$

3. Resolver a equação linear:
$$1 + 6 = 3x - x \Rightarrow 7 = 2x \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

b) $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

1. Fazer substituição: $u = 3^x$ (então $3^{2x} = u^2$)
$$u^2 - 12u + 27 = 0$$

2. Resolver a equação quadrática:

$$\Delta = 144 - 108 = 36$$

$$u = \frac{12 \pm 6}{2} \Rightarrow u = 9 \text{ ou } u = 3$$

3. Voltar para a variável original:
   - Se $3^x = 9 = 3^2$, então $x = 2$
   - Se $3^x = 3 = 3^1$, então $x = 1$

Respostas: a) $x = \frac{7}{2}$; b) $S = \{1, 2\}$

2.6.4 Inequações Exponenciais

Estratégias para Inequações

Para resolver inequações exponenciais:

Base $a > 1$: Função crescente

- Se $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, então $f(x) > g(x)$
- A desigualdade mantém o sentido

Base $0 < a < 1$: Função decrescente

- Se $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, então $f(x) < g(x)$
- A desigualdade inverte o sentido

Exemplo: Resolvendo Inequações Exponenciais

Problema: Resolva as inequações: a) $2^x > 16$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \geq 9$

Soluções:
a) $2^x > 16$

1. Expressar na mesma base: $16 = 2^4$

$$2^x > 2^4$$

2. Como $2 > 1$ (base maior que 1), a função é crescente:

$$x > 4$$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \geq 9$

1. Expressar na mesma base: $9 = 3^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

2. Como $0 < \frac{1}{3} < 1$ (base menor que 1), a função é decrescente. A desigualdade inverte:

$$x - 1 \leq -2 \Rightarrow x \leq -1$$

Respostas: a) $S = (4, +\infty)$; b) $S = (-\infty, -1]$

2.6.5 Gráficos da Função Exponencial

Gráfico 1: Funções Exponenciais Crescentes

Análise das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 3^x$:

1. **Pontos importantes:**

x	$f(x) = 2^x$	$g(x) = 3^x$	Pontos
-2	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{9} \approx 0,11$	$(-2, 0,25)$, $(-2, 0,11)$
-1	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{3} \approx 0,33$	$(-1, 0,5)$, $(-1, 0,33)$
0	1	1	$(0, 1)$ (ambas)
1	2	3	$(1, 2)$, $(1, 3)$
2	4	9	$(2, 4)$, $(2, 9)$

2. **Características comuns:**
   - Passam pelo ponto $(0, 1)$
   - Crescentes em todo o domínio
   - Assíntota horizontal: $y = 0$ (eixo x)
   - Domínio: $\mathbb{R}$, Imagem: $(0, +\infty)$

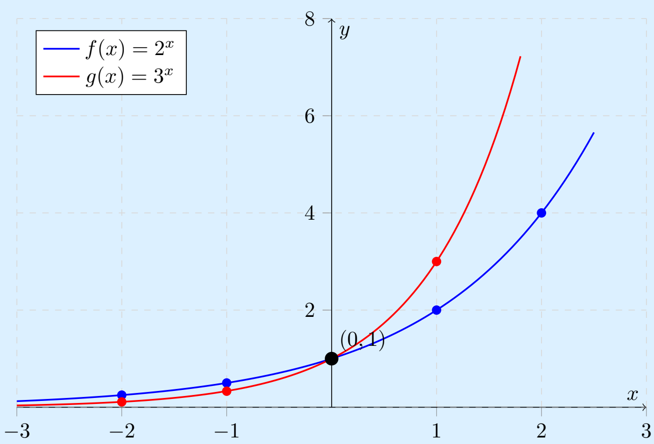


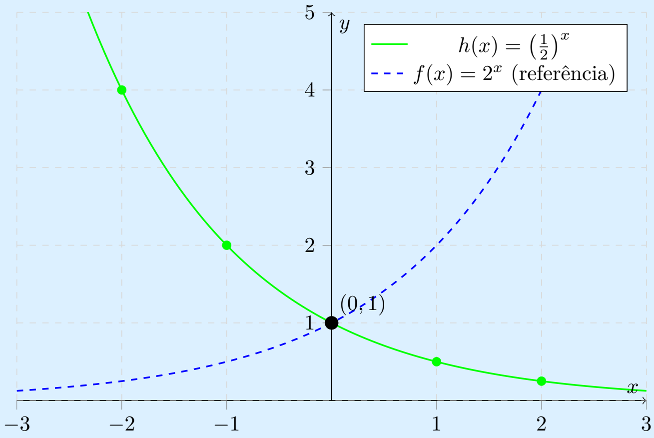
Gráfico 2: Função Exponencial Decrescente

Análise da função $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

1. **Reescrevendo:** $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$
2. **Pontos importantes:**

x	$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	Ponto (x, y)
-2	4	$(-2, 4)$
-1	2	$(-1, 2)$
0	1	$(0, 1)$
1	$0,5$	$(1, 0,5)$
2	$0,25$	$(2, 0,25)$

3. **Características:**
   - Decrescente em todo o domínio
   - Passa pelo ponto $(0, 1)$
   - Assíntota horizontal: $y = 0$
   - É reflexão de 2^x em relação ao eixo y



Comparação Visual:

- A função verde $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ é decrescente
- A função azul 2^x é crescente
- Ambas passam por $(0, 1)$ e têm assíntota $y = 0$
- São simétricas em relação ao eixo y

2.6.6 Aplicações da Função Exponencial

Modelos Exponenciais

A função exponencial modela diversos fenômenos:

Crescimento populacional: $P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$

Juros compostos: $M = C(1 + i)^t$

Decaimento radioativo: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

Resfriamento: Lei de Newton $T(t) = T_{\text{amb}} + (T_0 - T_{\text{amb}})e^{-kt}$

Exemplo: Aplicação em Juros Compostos

Problema: Um capital de 5.000,00 MT é aplicado a juros compostos de 8% ao ano. Determine: a) O montante após 3 anos; b) Quando o capital dobrará

Solução:

1. **Fórmula:** $M = C(1 + i)^t$ onde $C = 5000$, $i = 0,08$

   a) Montante após 3 anos:

$$M = 5000(1,08)^3 = 5000 \times 1,259712 = 6298,56$$

   b) Quando o capital dobra ($M = 10000$):

$$10000 = 5000(1,08)^t$$

$$2 = (1,08)^t$$

   Aplicando logaritmo:

$$\log 2 = t \log 1,08$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1,08} = \frac{0,3010}{0,0334} \approx 9 \text{ anos}$$

Respostas: a) 6.298,56 MT; b) Aproximadamente 9 anos

2.7 Função Logarítmica

2.7.1 Definição e Propriedades dos Logaritmos

O **logaritmo** é a função inversa da exponencial, sendo fundamental para resolver equações exponenciais e modelar fenômenos onde o crescimento se torna cada vez mais lento.

Definição

O logaritmo de um número é definido por:

- **Definição:** $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
- **Condições:** $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$
- **Domínio:** $(0, +\infty)$
- **Contradomínio:** $\mathbb{R}$

Propriedades Fundamentais dos Logaritmos

1. **Propriedades Básicas:**
   - $\log_a 1 = 0$ (pois $a^0 = 1$)
   - $\log_a a = 1$ (pois $a^1 = a$)
   - $\log_a a^x = x$
   - $a^{\log_a x} = x$
2. **Propriedades Operatórias:**
   - $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
   - $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
   - $\log_a x^n = n \log_a x$
   - $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$
3. **Mudança de Base:**
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$
4. **Logaritmos Especiais:**
   - $\log x = \log_{10} x$ (logaritmo decimal)
   - $\ln x = \log_e x$ (logaritmo natural)

Exemplo: Aplicando Propriedades dos Logaritmos

Problema: Calcule usando propriedades: a) $\log_2 8 + \log_2 4 - \log_2 16$; b) $\log 50 + \log 2$

a) $\log_2 8 + \log_2 4 - \log_2 16$

1. Aplicar as propriedades operatórias:
$$\log_2 8 + \log_2 4 - \log_2 16 = \log_2 \left(\frac{8 \times 4}{16}\right) = \log_2 \left(\frac{32}{16}\right) = \log_2 2$$
2. Aplicar $\log_a a = 1$:
$$\log_2 2 = 1$$

b) $\log 50 + \log 2$

1. Aplicar $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$:
$$\log 50 + \log 2 = \log(50 \times 2) = \log 100$$

2. Como $100 = 10^2$:

$$\log 100 = \log 10^2 = 2$$

2.7.2 Equações Logarítmicas

Métodos de Resolução

1. **Igualar os Logaritmos:** Se $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, então $f(x) = g(x)$
2. **Definição de Logaritmo:** $\log_a f(x) = b \Rightarrow a^b = f(x)$
3. **Propriedades dos Logaritmos:** Usar soma, diferença e potência para simplificar
4. **Mudança de Base:** Quando há logaritmos com bases diferentes
5. **Condições de Existência:** Sempre verificar se os argumentos são positivos

Exemplo: Resolvendo Equações Logarítmicas

Problema: Resolva as equações: a) $\log_3(x+1) + \log_3(x-1) = 2$; b) $\log x + \log(x-3) = 1$

Soluções:
a) $\log_3(x+1) + \log_3(x-1) = 2$

1. **Condições de existência:** $x + 1 > 0$ e $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$
2. **Aplicar propriedade da soma:**
$$\log_3[(x+1)(x-1)] = 2$$
$$\log_3(x^2 - 1) = 2$$
3. **Aplicar definição:**
$$3^2 = x^2 - 1 \Rightarrow 9 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = 10$$
4. **Resolver:**
$$x = \pm\sqrt{10}$$
5. **Verificar condições:** Como $x > 1$ e $\sqrt{10} \approx 3{,}16 > 1$, apenas $x = \sqrt{10}$ é válido.

b) $\log x + \log(x-3) = 1$

1. **Condições de existência:** $x > 0$ e $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$
2. **Aplicar propriedade da soma:**
$$\log[x(x-3)] = 1$$
3. **Aplicar definição (base 10):**
$$10^1 = x(x-3) \Rightarrow 10 = x^2 - 3x$$
4. **Resolver equação quadrática:**
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$
$$(x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = -2$$
5. **Verificar condições:** Como $x > 3$, apenas $x = 5$ é válido.

2.7.3 Inequações Logarítmicas

Estratégias para Inequações

Para resolver inequações logarítmicas:

Base $a > 1$: Função crescente

- Se $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, então $f(x) > g(x)$
- A desigualdade mantém o sentido

Base $0 < a < 1$**:** Função decrescente

- Se $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, então $f(x) < g(x)$
- A desigualdade inverte o sentido

Atenção: Sempre verificar condições de existência!

Exemplo: Resolvendo Inequações Logarítmicas

Problema: Resolva as inequações: a) $\log_2(x-1) > 3$; b) $\log_{1/2}(x+2) \geq -1$

Soluções:
a) $\log_2(x-1) > 3$

1. **Condição de existência:** $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$
2. **Como base** $2 > 1$**, função é crescente:**
$$x - 1 > 2^3 \Rightarrow x - 1 > 8 \Rightarrow x > 9$$
3. **Intersecção com condição de existência:** $x > 1 \;\; x > 9 = x > 9$

b) $\log_{1/2}(x+2) \geq -1$

1. **Condição de existência:** $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$
2. **Como base** $\frac{1}{2} < 1$**, função é decrescente:** A desigualdade inverte:
$$x + 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$
$$x \leq 0$$
3. **Intersecção com condição de existência:** $x > -2 \;\; x \leq 0 = -2 < x \leq 0$

Respostas: a) $S = (9, +\infty)$; b) $S = (-2, 0]$

2.7.4 Gráficos da Função Logarítmica

Gráfico 1: Funções Logarítmicas com Base Maior que 1

Análise das funções $f(x) = \log_2 x$ **e** $g(x) = \log_3 x$**:**

1. **Pontos importantes:**

x	$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = \log_3 x$	Observação
$\frac{1}{4}$	-2	$\log_3(\frac{1}{4}) \approx -1,26$	$x < 1 \Rightarrow y < 0$
$\frac{1}{2}$	-1	$\log_3(\frac{1}{2}) \approx -0,63$	
1	0	0	$(1, 0)$ comum
2	1	$\log_3 2 \approx 0,63$	
4	2	$\log_3 4 \approx 1,26$	$x > 1 \Rightarrow y > 0$
8	3	$\log_3 8 \approx 1,89$	

2. **Características comuns:**
   - Passam pelo ponto $(1, 0)$
   - Crescentes em todo o domínio
   - Assíntota vertical: $x = 0$ (eixo y)
   - Domínio: $(0, +\infty)$, Imagem: $\mathbb{R}$

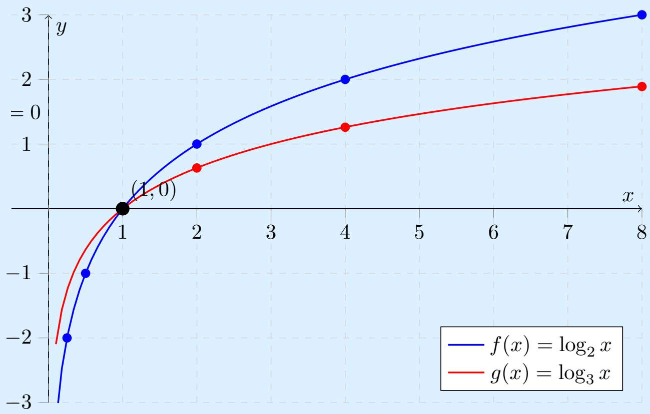
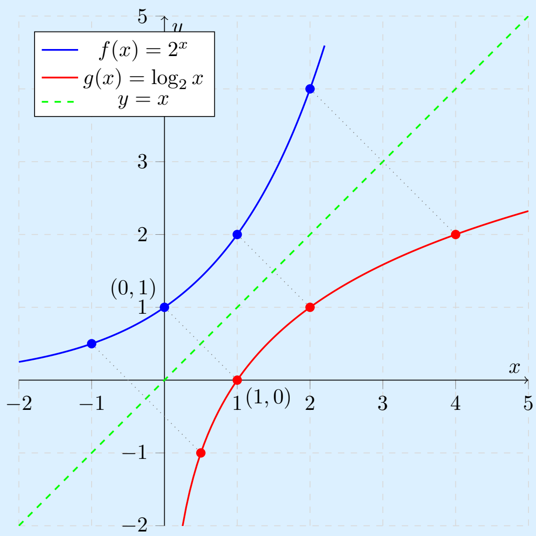


Gráfico 2: Comparação entre Exponencial e Logarítmica

Relação entre $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$ (funções inversas):

1. **Propriedade fundamental:** As funções são simétricas em relação à recta $y = x$
2. **Pontos correspondentes:**

$f(x) = 2^x$	**Recta** $y = x$	$g(x) = \log_2 x$
$(-1, \frac{1}{2})$	$\rightarrow$	$(\frac{1}{2}, -1)$
$(0, 1)$	$\rightarrow$	$(1, 0)$
$(1, 2)$	$\rightarrow$	$(2, 1)$
$(2, 4)$	$\rightarrow$	$(4, 2)$



Características da Simetria:

- Se (a, b) está em $f(x) = 2^x$, então (b, a) está em $g(x) = \log_2 x$
- Domínio de f = Imagem de $g = \mathbb{R}$
- Imagem de f = Domínio de $g = (0, +\infty)$
- Ambas são crescentes e contínuas em seus domínios

2.7.5 Aplicações da Função Logarítmica

Modelos Logarítmicos

A função logarítmica modela fenômenos onde o crescimento desacelera:

Escala de pH: $pH = -\log[H^+]$

Escala Richter: $M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$

Decibéis: $dB = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

Datação por carbono: Inversão de modelo exponencial

Exemplo: Aplicação na Escala Richter

Problema: A magnitude de um terremoto na escala Richter é dada por $M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$, onde A é a amplitude registrada e A_0 é uma amplitude de referência.
a) Se um terremoto tem magnitude 6, quantas vezes sua amplitude é maior que a de referência? b) Quantas vezes um terremoto de magnitude 7 é mais forte que um de magnitude 5?

Solução:
a) Para $M = 6$:

1. $6 = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$
2. $10^6 = \frac{A}{A_0}$
3. $A = 10^6 \cdot A_0 = 1.000.000 \cdot A_0$

b) Comparando magnitudes 7 e 5:

1. Magnitude 7: $\frac{A_7}{A_0} = 10^7$
2. Magnitude 5: $\frac{A_5}{A_0} = 10^5$
3. Razão: $\frac{A_7}{A_5} = \frac{10^7}{10^5} = 10^2 = 100$

Respostas: a) 1.000.000 vezes maior; b) 100 vezes mais forte

Exercícios

1. Resolva a equação $2^{x+1} - 2^{x-1} = 6$.

   Solução:

   Fatorar por 2^{x-1}:

$$\begin{aligned} &2^{x+1} - 2^{x-1} \\ &= 2^{x-1} \cdot 2^2 - 2^{x-1} \\ &= 2^{x-1}(4-1) \\ &= 3 \cdot 2^{x-1} \end{aligned}$$

   Logo: $3 \cdot 2^{x-1} = 6$

$$\begin{aligned} 2^{x-1} &= 2 \\ 2^{x-1} &= 2^1 \\ x - 1 &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

   Resposta: $x = 2$.

2. Resolva a inequação $\log_3(x-2) + \log_3(x+1) < 1$.
   Solução:
   Condições de existência: $x - 2 > 0$ e $x + 1 > 0 \Rightarrow x > 2$
   Aplicar propriedade da soma: $\log_3[(x-2)(x+1)] < 1$ $\log_3(x^2 - x - 2) < 1$
   Como base 3 > 1, função é crescente: $x^2 - x - 2 < 3^1$ $x^2 - x - 2 < 3$ $x^2 - x - 5 < 0$
   Resolver inequação quadrática: $\Delta = 1 + 20 = 21$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$
   Como $\sqrt{21} \approx 4,58$: $x_1 = \frac{1-4,58}{2} \approx -1,79$ $x_2 = \frac{1+4,58}{2} \approx 2,79$
   A parábola abre para cima, então $x^2 - x - 5 < 0$ para $-1,79 < x < 2,79$.
   Intersecção com condição de existência: $x > 2$ $\;-1,79 < x < 2,79 = 2 < x < 2,79$
   Resposta: $S = \left(2, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$.

3. Uma substância radioativa tem meia-vida de 8 horas. Se inicialmente há 100g, determine: a) A quantidade após 24 horas b) Quando restará 10g
   Solução:
   Modelo exponencial: $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$ onde $N_0 = 100g$ e $T = 8h$ (meia-vida).
   a) Após 24 horas: $N(24) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{24/8} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 100 \cdot \frac{1}{8} = 12,5g$
   b) Quando $N(t) = 10g$: $10 = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/8}$ $0,1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/8}$
   Aplicando logaritmo: $\log 0,1 = \frac{t}{8} \log(0,5)$ $-1 = \frac{t}{8} \cdot (-0,301)$ $t = \frac{8}{0,301} \approx 26,6$ horas
   Respostas: a) 12,5g; b) Aproximadamente 26,6 horas.

4. Simplifique a expressão $\log_2 \sqrt{8} + \log_2 \sqrt[3]{4} - \log_2 \sqrt[6]{2}$.
   Solução:
   Converter raízes para expoentes: $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 8^{1/2} = \frac{1}{2} \log_2 8 = \frac{1}{2} \log_2 2^3 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$
   $\log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 4^{1/3} = \frac{1}{3} \log_2 4 = \frac{1}{3} \log_2 2^2 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$
   $\log_2 \sqrt[6]{2} = \log_2 2^{1/6} = \frac{1}{6} \log_2 2 = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$
   Calcular: $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{9}{6} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{12}{6} = 2$
   Resposta: 2.

5. Determine o domínio da função $f(x) = \log_3(x^2 - 4) + \sqrt{\log_2(x+1)}$.
   Solução:
   Para $\log_3(x^2 - 4)$: $x^2 - 4 > 0$ $(x-2)(x+2) > 0$ Solução: $x < -2$ ou $x > 2$
   Para $\sqrt{\log_2(x+1)}$: Precisa de duas condições: 1) $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$ 2) $\log_2(x+1) \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 2^0 = 1 \Rightarrow x \geq 0$
   A segunda condição é mais restritiva: $x \geq 0$
   Intersecção de todas as condições: $(x < -2$ ou $x > 2)$ $\;(x \geq 0) = x > 2$
   Resposta: $D = (2, +\infty)$.

2.8 Noções de geometria

2.8.1 Conceitos Fundamentais da Geometria

A **Geometria** é o ramo da Matemática que estuda as formas, tamanhos, posições relativas de objetos e as propriedades do espaço. Seus conceitos fundamentais formam a base para compreensão de estruturas mais complexas.

Elementos Primitivos

A Geometria se baseia em três conceitos primitivos (indefinidos):

- **Ponto** - Não tem dimensão, indica apenas posição
- **Recta** - Tem uma dimensão, estende-se infinitamente
- **Plano** - Tem duas dimensões, estende-se infinitamente

Estes conceitos não são definidos, mas são aceitos intuitivamente como base para todas as definições geométricas.

Notação:

- Pontos: letras maiúsculas $(A, B, C, ...)$
- Retas: letras minúsculas $(r, s, t, ...)$ ou dois pontos $\overleftrightarrow{AB}$
- Planos: letras gregas $(\alpha, \beta, \gamma, ...)$ ou três pontos
- Segmentos: $\overline{AB}$ ou simplesmente AB
- Semirretas: $\overrightarrow{AB}$

Postulados básicos:

- Dois pontos determinam uma única reta
- Três pontos não colineares determinam um único plano
- Uma reta contém infinitos pontos
- Um plano contém infinitas retas

2.8.2 Ângulos - Definição e Classificação

Definição de Ângulo

Um **ângulo** é a reunião de duas semirretas que têm a mesma origem.
Elementos do ângulo:

- **Vértice:** Ponto comum das duas semirretas
- **Lados:** As duas semirretas que formam o ângulo
- **Medida:** Abertura entre os lados (em graus ou radianos)

Notação: $\angle AOB$ ou $\angle O$ ou simplesmente $\hat{O}$

Classificação dos Ângulos

Os ângulos podem ser classificados de acordo com sua medida:

Ângulo nulo: $0°$

Ângulo agudo: $0° < \alpha < 90°$

Ângulo recto: $\alpha = 90°$

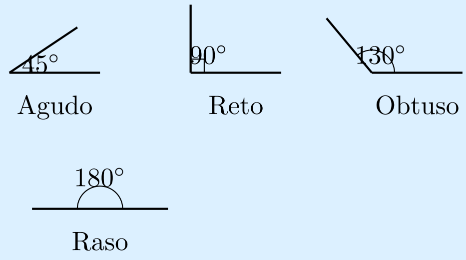
Ângulo obtuso: $90° < \alpha < 180°$

Ângulo raso: $\alpha = 180°$

Ângulo côncavo: $180° < \alpha < 360°$

Ângulo completo ou giro: $\alpha = 360°$

Exemplo: Representação Visual dos Ângulos



2.8.3 Relações entre Ângulos

Ângulos Especiais

1. Ângulos Complementares: Dois ângulos cuja soma é 90°

$$\alpha + \beta = 90°$$

2. Ângulos Suplementares: Dois ângulos cuja soma é 180°

$$\alpha + \beta = 180°$$

3. Ângulos Replementares: Dois ângulos cuja soma é 360°

$$\alpha + \beta = 360°$$

4. Ângulos Opostos pelo Vértice: Ângulos formados por duas rectas concorrentes. São sempre iguais.

Exemplo: Calculando Ângulos Relacionados

Problema: a) Determine o complemento de um ângulo de 35° b) Determine o suplemento de um ângulo de 120° c) Se dois ângulos são opostos pelo vértice e um mede $3x+20°$, enquanto o outro mede $5x-10°$, determine o valor de x

Soluções:
a) Complemento de 35°:

$$\text{Complemento} = 90° - 35° = 55°$$

b) Suplemento de 120°:

$$\text{Suplemento} = 180° - 120° = 60°$$

c) Ângulos opostos pelo vértice são iguais:

$$3x + 20° = 5x - 10°$$

$$20° + 10° = 5x - 3x$$

$$30° = 2x \Rightarrow x = 15°$$

Verificação: $3(15) + 20 = 65°$ e $5(15) - 10 = 65$ř

2.8.4 Retas Paralelas e Transversais

Definições Importantes

Quando uma reta transversal intercepta duas retas paralelas, forma oito ângulos que possuem relações especiais:

Ângulos correspondentes: Ocupam posições relativas iguais. São iguais.

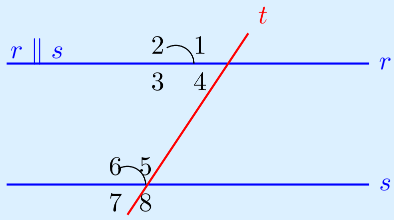
Ângulos alternos internos: Estão em lados opostos da transversal, entre as paralelas. São iguais.

Ângulos alternos externos: Estão em lados opostos da transversal, fora das paralelas. São iguais.

Ângulos colaterais internos: Estão do mesmo lado da transversal, entre as paralelas. São suplementares.

Ângulos colaterais externos: Estão do mesmo lado da transversal, fora das paralelas. São suplementares.

Exemplo: Retas Paralelas Cortadas por Transversal



Relações entre os ângulos:

- **Correspondentes:** $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$
- **Alternos internos:** $\angle 3 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 5$
- **Alternos externos:** $\angle 1 = \angle 8$, $\angle 2 = \angle 7$
- **Colaterais internos:** $\angle 3 + \angle 5 = 180$ř, $\angle 4 + \angle 6 = 180$ř

2.8.5 Triângulos - Classificação e Propriedades

Definição e Elementos do Triângulo

Um **triângulo** é um polígono de três lados.
Elementos:

- **Vértices:** Pontos de encontro dos lados (A, B, C)
- **Lados:** Segmentos que ligam os vértices (a, b, c)
- **Ângulos internos:** Ângulos formados pelos lados ($\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$)

Propriedade fundamental:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Classificação dos Triângulos

Os triângulos podem ser classificados de duas formas:

1. **Quanto aos lados:**

   Equilátero: Três lados iguais ($a = b = c$)
   Isósceles: Dois lados iguais
   Escaleno: Três lados diferentes

2. **Quanto aos ângulos:**

   Acutângulo: Três ângulos agudos
   Rectângulo: Um ângulo recto (90○)
   Obtusângulo: Um ângulo obtuso

2.8.6 Congruência de Triângulos

Casos de Congruência

Dois triângulos são **congruentes** quando têm a mesma forma e tamanho.
Casos de congruência:

1. **LAL (Lado-Ângulo-Lado):** dois lados e o ângulo compreendido entre eles
2. **ALA (Ângulo-Lado-Ângulo):** dois ângulos e o lado compreendido entre eles
3. **LLL (Lado-Lado-Lado):** os três lados correspondentes

Exemplo: Verificando Congruência

Problema: Determine se os triângulos ABC e DEF são congruentes: - Triângulo ABC: $AB = 5\text{cm}$, $\angle B = 60°$, $BC = 7\text{cm}$ - Triângulo DEF: $DE = 5\text{cm}$, $\angle E = 60\circ$, $EF = 7\text{cm}$

Solução:

1. **Comparar elementos dados:**
   - $AB = DE = 5\text{cm}$ (lados iguais)
   - $\angle B = \angle E = 60°$ (ângulos iguais)
   - $BC = EF = 7\text{cm}$ (lados iguais)
2. **Identificar o caso:** Temos dois lados e o ângulo compreendido entre eles iguais.
3. **Aplicar o caso LAL:** Como $AB = DE$, $\angle B = \angle E$ e $BC = EF$, os triângulos são congruentes pelo caso LAL.

Resposta: Sim, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ pelo caso LAL.

2.8.7 Quadriláteros - Tipos e Propriedades

Definição e Classificação

Um **quadrilátero** é um polígono de quatro lados.
Propriedade geral: A soma dos ângulos internos é sempre 360°.
Classificação principal:

Paralelogramos:	Lados opostos paralelos
Trapézios:	Apenas um par de lados paralelos
Outros:	Não possuem lados paralelos

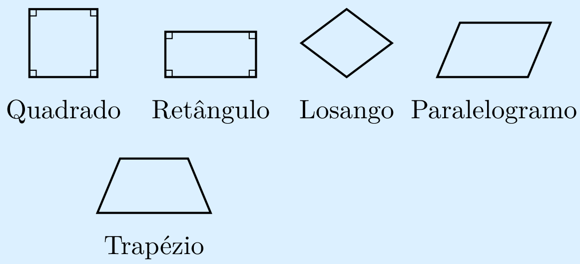
Tipos Especiais de Quadriláteros

1.
2. **Paralelogramos:**
   - **Rectângulo:** Quatro ângulos retos
   - **Losango:** Quatro lados iguais
   - **Quadrado:** Retângulo + Losango (4 lados iguais, 4 ângulos rectos)
3. **2. Trapézios:**
   - **Trapézio isósceles:** Lados não paralelos iguais
   - **Trapézio rectângulo:** Um ângulo recto

   Propriedades dos Paralelogramos:

- Lados opostos iguais e paralelos
- Ângulos opostos iguais
- Diagonais se cortam ao meio

Exemplo: Representação dos Quadriláteros



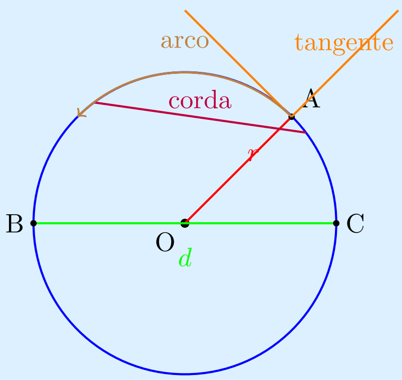
2.8.8 Círculo e Circunferência

Definições Fundamentais

Circunferência: Conjunto de todos os pontos do plano que estão a uma mesma distância (raio) de um ponto fixo (centro).
Círculo: Região do plano limitada por uma circunferência (inclui interior e fronteira).
Elementos principais:

- **Centro (O):** Ponto equidistante de todos os pontos da circunferência
- **Raio (r):** Segmento que liga o centro a qualquer ponto da circunferência
- **Diâmetro (d):** Segmento que passa pelo centro e liga dois pontos da circunferência ($d = 2r$)
- **Corda:** Segmento que liga dois pontos da circunferência
- **Arco:** Parte da circunferência compreendida entre dois pontos
- **Setor circular:** Região do círculo limitada por dois raios e um arco
- **Tangente:** Recta que toca a circunferência em apenas um ponto
- **Secante:** Recta que intercepta a circunferência em dois pontos

Exemplo: Elementos da Circunferência



Medidas no Círculo

Perímetro da Circunferência:

$$C = 2\pi r = \pi d$$

Área do Círculo:

$$A = \pi r^2$$

Comprimento de Arco: Para um arco de medida θ (em radianos):

$$\ell = r \cdot \theta$$

Para um arco de medida α (em graus):

$$\ell = \frac{\pi r \alpha}{180°}$$

Área do Setor Circular: Para um setor de ângulo θ (em radianos):

$$A_{setor} = \frac{r^2\theta}{2}$$

Para um setor de ângulo α (em graus):

$$A_{setor} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°}$$

Exemplo: Cálculos com Círculo

Problema: Uma circunferência tem raio de 6 cm. Calcule: a) O perímetro da circunferência b) A área do círculo c) O comprimento de um arco de 60° d) A área de um setor de 90°

Soluções:
a) Perímetro da circunferência:

$$C = 2\pi r = 2\pi \cdot 6 = 12\pi \text{ cm} \approx 37,7 \text{ cm}$$

b) Área do círculo:

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ cm}^2 \approx 113,1 \text{ cm}^2$$

c) Comprimento do arco de 60°:

$$\ell = \frac{\pi r \alpha}{180°} = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 60°}{180°} = \frac{360\pi}{180} = 2\pi \text{ cm} \approx 6,3 \text{ cm}$$

d) Área do setor de 90°:

$$A_{setor} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°} = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 90°}{360°} = \frac{3240\pi}{360} = 9\pi \text{ cm}^2 \approx 28,3 \text{ cm}^2$$

2.8.9 Polígonos Regulares

Definição e Propriedades

Um **polígono regular** é um polígono que possui todos os lados iguais e todos os ângulos internos iguais.
Elementos importantes:

- **Centro:** Ponto equidistante de todos os vértices
- **Raio:** Distância do centro a qualquer vértice
- **Apótema:** Distância do centro ao meio de qualquer lado

Relação fundamental: O apótema é perpendicular ao lado e divide o polígono em triângulos isósceles.

Fórmulas dos Polígonos Regulares

Para um polígono regular de n lados:
Ângulo interno:

$$\alpha_i = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

Ângulo externo:

$$\alpha_e = \frac{360°}{n}$$

Ângulo central:

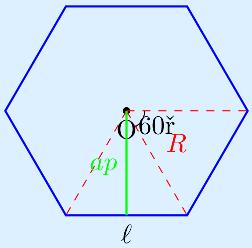
$$\alpha_c = \frac{360°}{n}$$

Número de diagonais:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Perímetro: $P = n \cdot \ell$ (onde ℓ é o lado)
Área: $A = \frac{P \cdot ap}{2}$ (onde ap é o apótema)

Exemplo: Hexágono Regular



Propriedades do hexágono regular:

- Ângulo interno: $\frac{(6-2)\cdot 180°}{6} = 120°$
- Ângulo central: $\frac{360°}{6} = 60°$
- Número de diagonais: $\frac{6(6-3)}{2} = 9$
- Se o lado é ℓ, então: $R = \ell$ e $ap = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

2.8.10 Área de Figuras Planas

Fórmulas de Área

Triângulo:

$$A = \frac{base \times altura}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Quadrado:

$$A = lado^2 = \ell^2$$

Retângulo:

$$A = base \times altura = b \cdot h$$

Paralelogramo:

$$A = base \times altura = b \cdot h$$

Losango:

$$A = \frac{D \times d}{2} \text{ (onde } D \text{ e } d \text{ são as diagonais)}$$

Trapézio:

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2} \text{ (onde } B \text{ e } b \text{ são as bases)}$$

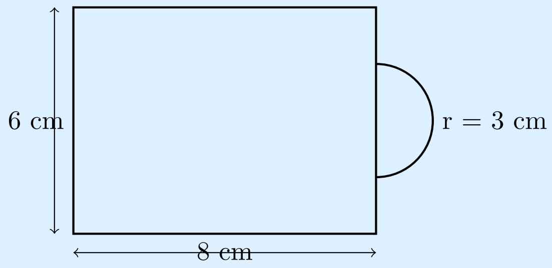
Círculo:

$$A = \pi r^2$$

Exemplo: Problema de Área Composta

Problema: Calcule a área da figura formada por um retângulo de 8 cm por 6 cm com um semicírculo de raio 3 cm anexado a um dos lados menores.

Solução:



Cálculo:

1. **Área do retângulo:**
$$A_{ret} = 8 \times 6 = 48 \text{ cm}^2$$

2. **Área do semicírculo:**
$$A_{semi} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \times 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2} \text{ cm}^2 \approx 14,1 \text{ cm}^2$$

3. **Área total:**
$$A_{total} = A_{ret} + A_{semi} = 48 + \frac{9\pi}{2} = 48 + 4,5\pi \text{ cm}^2 \approx 62,1 \text{ cm}^2$$

Exercícios

1. Calcule o complemento e o suplemento dos seguintes ângulos:

a) 25°

b) 78°

c) 156° (apenas o suplemento)

2. Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal. Se um dos ângulos mede 65°, determine as medidas dos outros sete ângulos.
3. Em um triângulo, dois ângulos medem 45° e 70°. Calcule o terceiro ângulo e classifique o triângulo.
4. Calcule a área de um trapézio com bases de 12 cm e 8 cm e altura de 5 cm.
5. Uma circunferência tem raio de 4 cm. Calcule:

a) O perímetro da circunferência

b) A área do círculo

c) A área de um setor de 120°

6. Quantas diagonais possui um dodecágono regular (12 lados)? Qual é a medida de cada ângulo interno?
7. Calcule a área da figura composta por um quadrado de lado 6 cm com um triângulo equilátero de lado 6 cm anexado a um de seus lados.

2.8.11 Teoremas Importantes

Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

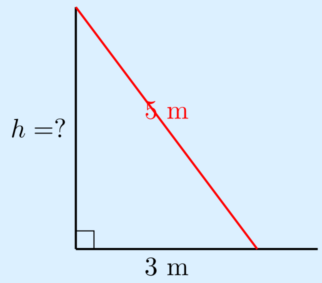
onde c é a hipotenusa e a, b são os catetos.
Aplicações:

- Cálculo de distâncias
- Verificação se um triângulo é retângulo
- Resolução de problemas geométricos

Exemplo: Aplicação do Teorema de Pitágoras

Problema: Uma escada de 5 metros está apoiada em uma parede. Se a base da escada está a 3 metros da parede, a que altura ela toca na parede?

Solução:



Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$5^2 = h^2 + 3^2$$
$$25 = h^2 + 9$$
$$h^2 = 25 - 9 = 16$$
$$h = \sqrt{16} = 4 \text{ metros}$$

Resposta: A escada toca na parede a 4 metros de altura.

Lei dos Cossenos

Para qualquer triângulo com lados a, b, c e ângulos opostos A, B, C:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Casos de aplicação:

- Conhecemos dois lados e o ângulo entre eles
- Conhecemos três lados e queremos um ângulo
- Triângulos não retângulos

Observação: Quando $C = 90°$, $\cos C = 0$ e a fórmula se reduz ao Teorema de Pitágoras.

2.9 Fundamentos e Relações Trigonométricas

A **trigonometria** é o ramo da matemática que estuda as relações entre os lados e ângulos de triângulos. Originalmente desenvolvida para resolver problemas de astronomia e navegação, hoje tem aplicações em diversas áreas como física, engenharia e computação.

Definição e Origem

A palavra **trigonometria** vem do grego:

- **Tri** = três
- **Gono** = ângulo
- **Metria** = medida

Literalmente significa "medida de três ângulos". A trigonometria estabelece relações entre:

- Os lados de um triângulo
- Os ângulos de um triângulo
- Funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente)

2.9.1 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é fundamental para toda a trigonometria, estabelecendo a relação entre os lados de um triângulo retângulo.

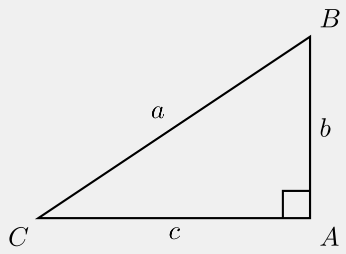
Teorema de Pitágoras

Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Onde:

- a = hipotenusa (lado maior, oposto ao ângulo reto)
- b e c = catetos (lados menores)



Aplicação do Teorema de Pitágoras

Problema: Em um triângulo retângulo, os catetos medem 3 cm e 4 cm. Qual é a medida da hipotenusa?
Solução: Dados: $b = 3$ cm, $c = 4$ cm
Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

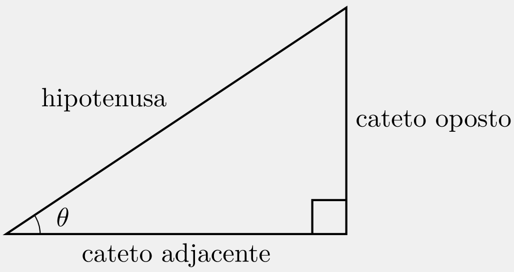
$$a = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Verificação: Este é o famoso triângulo 3-4-5, um dos trios pitagóricos mais conhecidos.
Resposta: $\boxed{a = 5 \text{ cm}}$

2.9.2 Relações Trigonométricas Básicas

Funções Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Para um ângulo agudo θ em um triângulo retângulo:



$$\boxed{\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \\ \cos\theta &= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \\ \tan\theta &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ \cot\theta &= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{1}{\tan\theta} \end{aligned}}$$

Relação Fundamental da Trigonometria

A mais importante relação trigonométrica é:

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

Esta relação decorre diretamente do Teorema de Pitágoras e é válida para qualquer ângulo θ.
Outras relações importantes:

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Onde $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ e $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

2.9.3 Arcos Especiais

Os ângulos de 30°, 45° e 60° (ou $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ radianos) aparecem frequentemente e suas razões trigonométricas devem ser memorizadas.

Tabela dos Arcos Especiais

Ângulo	**Radianos**	**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$

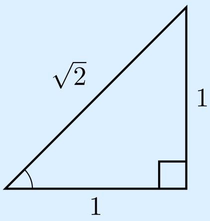
Dica para memorizar:

- Para seno: $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$
- Para cosseno: inverta a ordem do seno

- Para tangente: $\dfrac{\text{sen}}{\text{cos}}$

Dedução dos Valores Especiais

Triângulo de $45°$**-**$45°$**-**$90°$**:**



Em um triângulo isósceles com catetos iguais a 1:

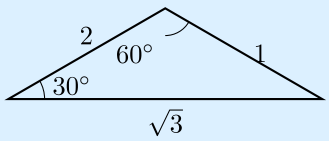
$$\text{hipotenusa} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Logo:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

Triângulo de $30° - 60° - 90°$**:**



Este é metade de um triângulo equilátero de lado 2.
Para $30°$:

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para $60°$:

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \tan 60° = \sqrt{3}$$

2.9.4 Teorema dos Senos

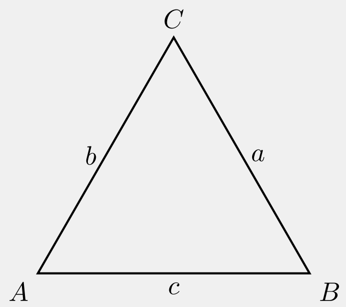
O Teorema dos Senos estende a trigonometria para triângulos quaisquer, não apenas retângulos.

Lei dos Senos

Em qualquer triângulo com lados a, b, c e ângulos opostos A, B, C:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

Onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.



Aplicação: Use quando conhecer dois ângulos e um lado, ou dois lados e um ângulo oposto.

Aplicação da Lei dos Senos

Problema: Em um triângulo, temos $A = 30°$, $B = 45°$ e o lado $a = 10$ cm. Encontre o lado b.
Solução:
Primeiro, encontramos o ângulo C:

$$C = 180° - A - B = 180° - 30° - 45° = 105°$$

Aplicando a Lei dos Senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{10}{\sin 30°} = \frac{b}{\sin 45°}$$

$$\frac{10}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$20 = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$b = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

Resposta: $\boxed{b = 10\sqrt{2} \text{ cm} \approx 14{,}14 \text{ cm}}$

2.9.5 Teorema dos Cossenos

O Teorema dos Cossenos é uma generalização do Teorema de Pitágoras para triângulos quaisquer.

Lei dos Cossenos

Em qualquer triângulo com lados a, b, c e ângulo C oposto ao lado c:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

Analogamente:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

Nota: Quando $C = 90°$, temos $\cos 90° = 0$, e a fórmula se reduz ao Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$.
Aplicação: Use quando conhecer três lados, ou dois lados e o ângulo entre eles.

Aplicação da Lei dos Cossenos

Problema: Em um triângulo, os lados medem $a = 8$ cm, $b = 6$ cm e $c = 10$ cm. Encontre o ângulo C.
Solução:

Aplicando a Lei dos Cossenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Substituindo os valores:

$$10^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos C$$

$$100 = 64 + 36 - 96\cos C$$

$$100 = 100 - 96\cos C$$

$$0 = -96\cos C$$

$$\cos C = 0$$

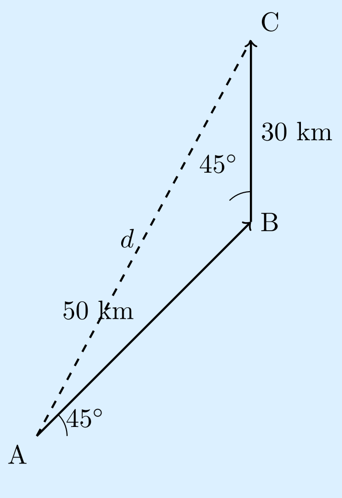
$$C = 90°$$

Verificação: Como $8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 = 10^2$, este é um triângulo retângulo com hipotenusa $c = 10$ cm.
Resposta: $\boxed{C = 90°}$

2.9.6 Aplicações Práticas

Problema de Navegação

Problema: Um navio parte do porto A e navega 50 km na direção nordeste (45°). Em seguida, muda o curso e navega mais 30 km na direção norte. Qual a distância do navio ao porto A?
Solução:



O ângulo no ponto B é:

$$\angle ABC = 180° - 45° = 135°$$

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ABC:

$$d^2 = 50^2 + 30^2 - 2 \cdot 50 \cdot 30 \cdot \cos 135°$$

$$d^2 = 2500 + 900 - 3000 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$d^2 = 3400 + 3000 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3400 + 1500\sqrt{2}$$

$$d^2 = 3400 + 2121{,}32 = 5521{,}32$$

$$d = \sqrt{5521{,}32} \approx 74{,}3 \text{ km}$$

Resposta: $\boxed{d \approx 74{,}3 \text{ km}}$

Exercícios

1. Calcule o valor de x no triângulo retângulo onde a hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 5 cm.

   Solução: Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$13^2 = 5^2 + x^2$$
$$169 = 25 + x^2$$
$$x^2 = 144$$
$$x = 12 \text{ cm}$$

2. Se $\sin\theta = \frac{3}{5}$ e θ é um ângulo agudo, calcule $\cos\theta$ e $\tan\theta$.

   Solução: Usando a relação fundamental:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$
$$\frac{9}{25} + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = \frac{16}{25}$$

   Como θ é agudo, $\cos\theta > 0$:

$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

   Para a tangente:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

   Resposta: $\cos\theta = \frac{4}{5}$ e $\tan\theta = \frac{3}{4}$

3. Em um triângulo qualquer, dois lados medem 7 cm e 10 cm, e o ângulo entre eles é 60°. Calcule o terceiro lado.

   Solução: Usando a Lei dos Cossenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$c^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ$$
$$c^2 = 49 + 100 - 140 \cdot \frac{1}{2}$$
$$c^2 = 149 - 70 = 79$$
$$c = \sqrt{79} \approx 8{,}89 \text{ cm}$$

   Resposta: $c = \sqrt{79} \approx 8{,}89$ cm

2.10 Geometria analítica

A **Geometria Analítica** é o ramo da Matemática que estabelece uma correspondência entre conceitos geométricos e algébricos, permitindo resolver problemas geométricos através de métodos algébricos. Ela utiliza um sistema de coordenadas para localizar pontos, retas e figuras no plano ou no espaço.

Definição

A Geometria Analítica permite:

- **Representar** pontos através de coordenadas (x, y) no plano cartesiano.
- **Calcular** distâncias entre pontos usando fórmulas algébricas.
- **Determinar** equações de retas, curvas e figuras geométricas.
- **Resolver** problemas geométricos usando álgebra.

2.10.1 Sistema de Coordenadas Cartesianas

Plano Cartesiano: Sistema formado por dois eixos perpendiculares que se cruzam na origem $O(0, 0)$.

Eixo das abscissas (x): Eixo horizontal, onde valores positivos ficam à direita da origem e negativos à esquerda.

Eixo das ordenadas (y): Eixo vertical, onde valores positivos ficam acima da origem e negativos abaixo.

Coordenadas de um ponto: Todo ponto P no plano é representado por um par ordenado (x, y), onde:

- x é a **abscissa** (distância horizontal até o eixo y)
- y é a **ordenada** (distância vertical até o eixo x)

Quadrantes: O plano cartesiano é dividido em quatro regiões:

- 1° **quadrante:** $x > 0$ e $y > 0$
- 2° **quadrante:** $x < 0$ e $y > 0$
- 3° **quadrante:** $x < 0$ e $y < 0$
- 4° **quadrante:** $x > 0$ e $y < 0$

2.10.2 Distância entre dois pontos

Fórmula da Distância

Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, a distância entre eles é:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula é uma aplicação direta do **Teorema de Pitágoras**.

Exemplo: Calculando Distância entre Pontos

Problema: Calcule a distância entre os pontos $A(2, 3)$ e $B(5, 7)$.

Solução:

1. **Identificar as coordenadas:** $A(2, 3) \Rightarrow x_1 = 2, y_1 = 3$ $B(5, 7) \Rightarrow x_2 = 5, y_2 = 7$
2. **Aplicar a fórmula da distância:**

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3. **Substituir os valores:**

$$d_{AB} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (7 - 3)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

4. **Resposta:**

$$\boxed{d_{AB} = 5 \text{ unidades}}$$

2.10.3 Distância entre um ponto e uma recta

Distância Ponto-Reta

Para calcular a distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ até uma reta $r : ax + by + c = 0$:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Onde a, b e c são os coeficientes da equação geral da recta.

Exemplo: Distância ponto-recta

Problema: Calcule a distância do ponto $P(3, 1)$ à recta $r : 2x - y + 4 = 0$.

Solução:

1. **Identificar os dados:** Ponto: $P(3, 1) \Rightarrow x_0 = 3, y_0 = 1$ Recta: $2x - y + 4 = 0 \Rightarrow a = 2, b = -1, c = 4$
2. **Aplicar a fórmula:**
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
3. **Substituir os valores:**
$$d = \frac{|2(3) + (-1)(1) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$
$$d = \frac{|6 - 1 + 4|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|9|}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$
4. **Racionalizar o denominador:**
$$d = \frac{9}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$
5. **Resposta:**
$$\boxed{d = \frac{9\sqrt{5}}{5} \text{ unidades}}$$

2.10.4 Distância entre duas rectas

Casos Possíveis

Para duas rectas no plano, temos três situações:

1. **Rectas concorrentes:** Se intersectam em um ponto. Distância $= 0$.
2. **Rectas coincidentes:** São a mesma recta. Distância $= 0$.
3. **Rectas paralelas:** Nunca se encontram. Distância constante > 0.

Apenas rectas **paralelas** têm distância diferente de zero.

Distância entre rectas paralelas

Para duas retas paralelas:

$$r_1 : ax + by + c_1 = 0$$
$$r_2 : ax + by + c_2 = 0$$

A distância entre elas é:

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo: Distância entre rectas paralelas

Problema: Calcule a distância entre as rectas paralelas $r_1 : 3x + 4y - 5 = 0$ e $r_2 : 3x + 4y + 7 = 0$.

Solução:

1. **Verificar se são paralelas:** $r_1 : 3x + 4y - 5 = 0$ $r_2 : 3x + 4y + 7 = 0$ Como os coeficientes de x e y são iguais, as rectas são paralelas.
2. **Identificar os coeficientes:** $a = 3, b = 4, c_1 = -5, c_2 = 7$
3. **Aplicar a fórmula:**
$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(-5) - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$
$$d = \frac{|-12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{12}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}$$
4. **Resposta:**
$$\boxed{d = \frac{12}{5} = 2{,}4 \text{ unidades}}$$

2.10.5 Noção de Vetores

Definição de Vetor

Um **vetor** é uma entidade matemática que possui:

- **Módulo** (ou intensidade): o comprimento do vetor
- **Direção**: a reta que contém o vetor
- **Sentido**: orientação sobre a reta (para onde aponta)

Geometricamente, um vetor é representado por um segmento de reta orientado (uma seta).

Notação: Um vetor pode ser representado por:

- $\overrightarrow{AB}$ (vetor de A para B)
- $\vec{v}$ (vetor v)
- (a, b) (componentes do vetor no plano)

Componentes: Se $\vec{v} = (a, b)$, então:

- a é a componente horizontal
- b é a componente vertical

Vetor entre dois pontos: Para pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

2.10.6 Direção, sentido e representação

Características dos Vetores

Direção: É determinada pela reta suporte do vetor. Vetores com a mesma direção são **colineares**.

Sentido: Indica para onde o vetor aponta ao longo de sua direção. Pode ser **positivo** ou **negativo**.

Representação: Vetores podem ser representados:

- **Geometricamente:** como setas
- **Algebricamente:** através de suas componentes
- **Em coordenadas:** $\vec{v} = (v_x, v_y)$

Exemplo: Determinando um Vetor

Problema: Determine o vetor $\overrightarrow{AB}$ sendo $A(1, 2)$ e $B(4, 6)$.

Solução:

1. **Aplicar a fórmula:**
$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$
2. **Substituir as coordenadas:**
$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1, 6 - 2) = (3, 4)$$
3. **Interpretação:**
   - O vetor desloca 3 unidades na direção horizontal (positiva)
   - O vetor desloca 4 unidades na direção vertical (positiva)
   - Direção: reta que passa por A e B
   - Sentido: de A para B
4. **Resposta:**
$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (3, 4)}$$

2.10.7 Comprimento (Norma) de um vector

Módulo de um vector

Para um vector $\vec{v} = (a, b)$, seu módulo (ou norma) é:

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

O módulo representa o comprimento do vetor e é sempre um valor não-negativo.

Exemplo: Calculando o Módulo de um Vetor

Problema: Calcule o módulo do vetor $\vec{u} = (6, 8)$.

Solução:

1. **Identificar as componentes:** $\vec{u} = (6, 8) \Rightarrow a = 6, b = 8$
2. **Aplicar a fórmula do módulo:**
$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2}$$
3. **Calcular:**
$$|\vec{u}| = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

4. **Resposta:**

$$\boxed{|\vec{u}| = 10 \text{ unidades}}$$

Exemplo: Aplicações da Geometria Analítica

1. **Verificar se três pontos são colineares:**
   Dados $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ e $C(5, 6)$, verificar se estão alinhados.
   Método: Calcular os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e verificar se são proporcionais.
   $$\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 4 - 2) = (2, 2)$$
   $$\overrightarrow{AC} = (5 - 1, 6 - 2) = (4, 4) = 2(2, 2) = 2\overrightarrow{AB}$$
   Como $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, os pontos são **colineares**.

2. **Determinar o ponto médio de um segmento:**
   Para pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, o ponto médio M é:
   $$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
   Exemplo: Se $P(2, 3)$ e $Q(8, 7)$, então:
   $$M = \left(\frac{2 + 8}{2}, \frac{3 + 7}{2}\right) = (5, 5)$$

3. **Calcular a área de um triângulo:**
   Para um triângulo com vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$:
   $$\text{Área} = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$
   Exemplo: Para $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ e $C(2, 3)$:
   $$\text{Área} = \frac{1}{2}|0(0 - 3) + 4(3 - 0) + 2(0 - 0)| = \frac{1}{2}|0 + 12 + 0| = 6$$

Exercícios

1. Determine a distância entre os pontos $A(-2, 1)$ e $B(3, -4)$.
   Solução:
   Aplicando a fórmula da distância:
   $$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
   $$d_{AB} = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
   Resposta: $d_{AB} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ unidades.

2. Calcule a distância do ponto $P(2, -1)$ à reta $r : x - 2y + 3 = 0$.
   Solução:
   Da equação da reta: $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$ Do ponto: $x_0 = 2$, $y_0 = -1$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(2) + (-2)(-1) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$d = \frac{|2 + 2 + 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

Resposta: $d = \frac{7\sqrt{5}}{5}$ unidades.

3. Dado o vector $\vec{v} = (-3, 4)$, calcule seu módulo e determine um vector unitário na mesma direção.
   Solução:
   Módulo:
   $$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$
   Vetor unitário: Um vetor unitário $\hat{v}$ é obtido dividindo o vetor pelo seu módulo:
   $$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-3, 4)}{5} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$
   Verificação: $|\hat{v}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$
   Resposta: $|\vec{v}| = 5$ e $\hat{v} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.


TrocaPay
Seu saldo de PayPal em Metical, Rápido e Seguro.
O seu saldo
PayPal no M-pesa
Transfere o seu saldo
ESTAGNADO no PayPal
para o M-pesa ou E-mola
por uma Taxa adicional
de +12%
SOLICITE -NOS
Cell: +258 87 936 9395
Morada: Polana Caniço A,
Av. Vladimir Lenine, Maputo,
Moçambique
Fácil, Rápido
e Seguro


TrocaPay
Aceitamos toda
Moeda
estrangeira
Pagamentos mobile
Digital câmbio
Transferência carteiras
móveis
Cartões de crédito
SOLICITE NOS JÁ
Telefone
879369395
Morada
Polana Caniço A, Av. Vladimir
Lenine, Maputo, Moçambique

Capítulo 3

Análise Matemática

3.1 Análise combinatória

A **Análise Combinatória** é o ramo da Matemática que estuda métodos de **contagem**, ou seja, técnicas para determinar o número de maneiras de organizar, escolher ou agrupar elementos de um conjunto, seguindo certas regras ou condições.

Definição Simples

A Análise Combinatória responde perguntas do tipo:

- De quantas maneiras podemos **arranjar** objetos?
- Quantas **combinações** diferentes podemos formar?
- Em quantas formas podemos **escolher** elementos de um grupo?
- Qual o número de **possibilidades** em uma situação?

3.1.1 Fatorial de um Número

O fatorial é a base de muitos cálculos em Análise Combinatória.

Definição de Fatorial

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Por convenção:

- $0! = 1$
- $1! = 1$

Exemplos de Fatoriais

$$\begin{aligned}
3! &= 3 \times 2 \times 1 = 6 \\
4! &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \\
5! &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \\
6! &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720
\end{aligned}$$

Propriedade útil:

$$n! = n \times (n-1)!$$

Exemplo: $7! = 7 \times 6! = 7 \times 720 = 5040$

3.1.2 Expressões e Simplificações com Fatorial

Técnicas de Simplificação

Para simplificar expressões com fatoriais:

1. **Expandir o maior fatorial** até o denominador
2. **Cancelar** termos comuns
3. **Calcular** o resultado

Simplificação de Expressões

1. **Calcular** $\frac{8!}{5!}$

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

2. **Calcular** $\frac{n!}{(n-2)!}$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)!} = n \times (n-1) = n(n-1)$$

3. **Calcular** $\frac{(n+1)!}{n!}$

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \times n!}{n!} = n+1$$

3.1.3 Equações com Fatorial

Resolução de Equações

1. **Resolver:** $x! = 120$

   Testamos valores:

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \\ 3! &= 6 \\ 4! &= 24 \\ 5! &= 120 \end{aligned}$$

   Portanto: $x = 5$

2. **Resolver:** $\frac{(x+1)!}{x!} = 7$

   Simplificando:

$$\frac{(x+1)!}{x!} = \frac{(x+1)x!}{x!} = \frac{(x+1)\cancel{x!}}{\cancel{x!}} = x+1 = 7$$

   Logo: $x = 6$

3. **Resolver:** $\frac{x!}{(x-2)!} = 42$

   Simplificando:

$$\frac{x!}{(x-2)!} = x(x-1) = 42$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

Fatorando: $(x-7)(x+6)=0$

Como x deve ser positivo: $x=7$

3.1.4 Princípio Fundamental da Contagem

Quando Multiplicar e Quando Somar

MULTIPLICAR quando os eventos ocorrem **em sequência** (um E outro):

$$\text{Número total} = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots$$

SOMAR quando os eventos são **alternativos** (um OU outro):

$$\text{Número total} = n_1 + n_2 + n_3 + \dots$$

Aplicação do Princípio

1. **Placas de carros:** Uma placa tem 3 letras E 4 números. Quantas placas diferentes?

   Solução: Como precisamos de letras E números (sequencial):

   $$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^3 \times 10^4 = 175.760.000$$

2. **Rotas alternativas:** Para ir de A para B há 3 caminhos, e de A para C há 5 caminhos. De quantas maneiras posso sair de A?

   Solução: Como posso ir para B OU para C (alternativo):

   $$3 + 5 = 8 \text{ maneiras}$$

3. **Combinado:** Para ir de A para B há 3 caminhos, e de B para C há 4 caminhos. De quantas maneiras posso ir de A para C passando por B?

   Solução: Como preciso ir de A para B E depois de B para C:

   $$3 \times 4 = 12 \text{ maneiras}$$

3.1.5 Arranjos

Os arranjos consideram a **ordem** dos elementos.

Arranjos Simples

Arranjo de n elementos tomados p a p:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

onde $p \leq n$

Arranjos com Repetição

Quando é permitido repetir elementos:

$$AR_{n,p} = n^p$$

Exemplos de Arranjos

1. **Arranjos simples:** Com 5 pessoas, de quantas maneiras podemos formar uma fila de 3 pessoas?

   Solução:

   $$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

2. **Arranjos com repetição:** Quantas senhas de 4 dígitos podemos formar usando os dígitos 0, 1, 2?
   Solução:
   $$AR_{3,4} = 3^4 = 81$$

3.1.6 Permutações

Permutações são arranjos onde usamos **todos** os elementos ($p = n$).

Permutações Simples

$$P_n = n!$$

Permutações com Repetição

Com n_1 elementos iguais do tipo 1, n_2 do tipo 2, etc:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}$$

Exemplos de Permutações

1. **Permutações simples:** De quantas maneiras 6 pessoas podem se sentar em uma fila?
   Solução:
   $$P_6 = 6! = 720$$
2. **Permutações com repetição:** Quantos anagramas tem a palavra MATEMÁTICA?
   A palavra tem 10 letras: M(2), A(3), T(2), E(1), I(1), C(1)
   Solução:
   $$P_{10}^{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2! \times 3! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!} = \frac{3.628.800}{2 \times 6 \times 2} = 151.200$$

3.1.7 Combinações

Nas combinações, a **ordem não importa**.

Combinações Simples

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Combinações com Repetição

$$CR_{n,p} = C_{n+p-1,p} = \binom{n+p-1}{p}$$

Exemplos de Combinações

1. **Combinações simples:** De um grupo de 10 pessoas, quantas comissões de 4 pessoas podemos formar?
   Solução:
   $$C_{10,4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4! \times 6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$
2. **Combinações com repetição:** De quantas maneiras podemos escolher 3 frutas de 4 tipos diferentes, podendo repetir?
   Solução:
   $$CR_{4,3} = C_{4+3-1,3} = C_{6,3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

3.1.8 Binômio de Newton

Fórmula do Binômio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Expandindo:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

3.1.9 Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal organiza os coeficientes binomiais:

Triângulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Propriedades:

- Cada linha n contém os coeficientes de $(a+b)^n$
- Cada elemento é a soma dos dois elementos acima dele
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (Relação de Stifel)

3.1.10 Termo Geral e Termo Médio

Termo Geral

O termo geral de $(a+b)^n$ é:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Termo Médio

- Se n é **par**: existe um único termo médio, que é o termo $T_{\frac{n}{2}+1}$
- Se n é **ímpar**: existem dois termos médios: $T_{\frac{n+1}{2}}$ e $T_{\frac{n+3}{2}}$

Aplicação do Termo Geral

Encontrar o $6°$ **termo de** $(2x+3y)^{10}$
Solução: O $6°$ termo corresponde a $k=5$:

$$T_6 = T_{5+1} = \binom{10}{5}(2x)^{10-5}(3y)^5$$

$$T_6 = \binom{10}{5}(2x)^5(3y)^5 = 252 \times 32x^5 \times 243y^5$$

$$T_6 = 252 \times 32 \times 243 \times x^5y^5 = 1.959.552x^5y^5$$

3.1.11 Soma dos Coeficientes Binomiais

Propriedades dos Coeficientes

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

Outras propriedades úteis:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0 \text{ (para } n>0)$$
$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \text{ (simetria)}$$
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=2^{n-1}$$
$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=2^{n-1}$$

Aplicação das Propriedades

1. **Calcular a soma:** $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\ldots+\binom{8}{8}$

   Solução:

   $$\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}=2^8=256$$

2. **Encontrar o coeficiente de x^5 em** $(1+x)^{12}$

   Solução: O coeficiente de x^5 é $\binom{12}{5}$:

   $$\binom{12}{5}=\frac{12!}{5!\times 7!}=\frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=792$$

Exercícios

1. **Simplificar:** $\dfrac{12!}{9!\times 3!}$

   Solução:

   $$\frac{12!}{9!\times 3!}=\frac{12\times 11\times 10\times 9!}{9!\times 6}=\frac{12\times 11\times 10}{6}=\frac{1320}{6}=220$$

2. **Resolver:** $\dfrac{x!}{(x-3)!}=24$

   Solução:

   $$\frac{x!}{(x-3)!}=x(x-1)(x-2)=24$$

   Testando: $x=4$:

   $$4\times 3\times 2=24$$

   Logo: $x=4$

3. **Quantos anagramas da palavra ESCOLA começam com vogal?**

   Solução: ESCOLA tem 6 letras, com vogais E, O (2 vogais).

   - Escolha da 1ł posição: 2 opções (E ou O)
   - Arranjo das outras 5 posições: 5!

   Total: $2\times 5!=2\times 120=240$

4. **De quantas maneiras podemos escolher 3 livros de uma estante com 10 livros?**
Solução: Como a ordem não importa, usamos combinação:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120$$

5. **Encontrar o termo independente de x em** $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^9$

Solução: O termo geral é:

$$T_{k+1} = \binom{9}{k}(x^2)^{9-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = \binom{9}{k}x^{18-2k}x^{-k} = \binom{9}{k}x^{18-3k}$$

Para o termo independente: $18 - 3k = 0 \Rightarrow k = 6$

$$T_7 = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

3.2 Função real de variável real

Uma **função real de variável real** é uma relação matemática que associa a cada elemento x de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ (domínio) um único elemento y de um conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ (contradomínio).

Definição Formal

Uma função $f : A \to B$ é uma relação que satisfaz:

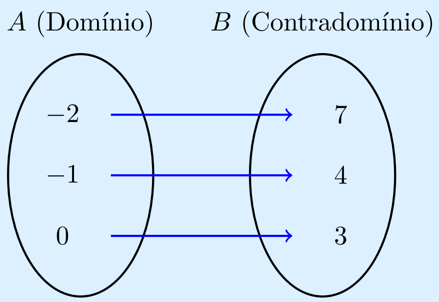
- Cada elemento do **domínio** tem uma **única imagem** no contradomínio
- Escrevemos: $y = f(x)$ ou $f(x) = y$
- x é a **variável independente**
- y é a **variável dependente**

3.2.1 Formas de Representar uma Função

1. Palavras (Descrição Verbal)

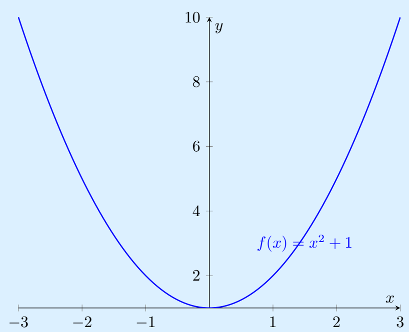
Exemplo: "A função que associa a cada número real o seu quadrado aumentado de 3"
Esta descrição define a função $f(x) = x^2 + 3$

2. Diagrama de Venn



$$f(x) = x^2 + 3$$

3. Gráfico Cartesiano



Teste da recta vertical: Uma relação é função se qualquer recta vertical intercepta o gráfico no máximo uma vez.

4. Expressão Analítica

A forma mais comum de expressar uma função:

- $f(x) = 2x + 1$ (função linear)

- $g(x) = x^2 - 4x + 3$ (função quadrática)
- $h(x) = \frac{1}{x}$ (função hiperbólica)
- $p(x) = \sqrt{x-1}$ (função com radical)

3.2.2 Classificação: Funções Monótonas

Definições de Monotonia

Seja f uma função definida em um intervalo I:

- **Crescente:** Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **Decrescente:** Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- **Não decrescente:** Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- **Não crescente:** Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Exemplos de Monotonia

1. **Função crescente:** $f(x) = 2x + 1$
   Para $x_1 < x_2$:
   $$f(x_2) - f(x_1) = (2x_2 + 1) - (2x_1 + 1) = 2(x_2 - x_1) > 0$$
2. **Função decrescente:** $g(x) = -x + 3$
   Para $x_1 < x_2$:
   $$g(x_2) - g(x_1) = (-x_2 + 3) - (-x_1 + 3) = -(x_2 - x_1) < 0$$
3. **Função não monótona:** $h(x) = x^2$
   A função decresce em $(-\infty, 0)$ e cresce em $(0, +\infty)$

3.2.3 Classificação: Funções Par e Ímpar

Definições

Seja f uma função com domínio simétrico em relação à origem:

- **Função Par:** $f(-x) = f(x)$ para todo x do domínio
- **Função Ímpar:** $f(-x) = -f(x)$ para todo x do domínio

Interpretação Geométrica

- **Função Par:** O gráfico é **simétrico** em relação ao **eixo y**
- **Função Ímpar:** O gráfico é **simétrico** em relação à **origem**

Exemplos de Paridade

1. **Função Par:** $f(x) = x^2 + 2$
   Verificação: $f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$
2. **Função Ímpar:** $g(x) = x^3 - x$
   Verificação: $g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x)$
3. **Nem par nem ímpar:** $h(x) = x^2 + x$

$h(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$

3.2.4 Classificação: Funções Limitadas

Definições de Limitação

Uma função f é:

- **Limitada superiormente:** $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M$ para todo x do domínio
- **Limitada inferiormente:** $\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m$ para todo x do domínio
- **Limitada:** Se é limitada superior e inferiormente
- **Ilimitada:** Se não é limitada

Exemplos de Limitação

1. **Função limitada:** $f(x) = \sin(x)$
   $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$
2. **Função limitada inferiormente:** $g(x) = x^2$
   $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, mas não tem limitação superior
3. **Função ilimitada:** $h(x) = 2x + 1$
   Para qualquer $M > 0$, existe x tal que $h(x) > M$

3.2.5 Injetividade: Tipos de Funções

Definições

Seja $f : A \to B$ uma função:

- **Injetiva (1-1):** $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- **Sobrejetiva:** Para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$
- **Bijetiva:** É injetiva e sobrejetiva simultaneamente

Testes Gráficos

- **Teste da reta horizontal (injetividade):** Função é injetiva se qualquer reta horizontal intercepta o gráfico no máximo uma vez
- **Sobrejetividade:** Depende do contradomínio especificado
- **Bijetividade:** Combina ambos os requisitos anteriores

Análise de Injetividade

1. **Função injetiva:** $f(x) = 2x + 1$
   Se $f(x_1) = f(x_2)$, então $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$
2. **Função não injetiva:** $g(x) = x^2$
   $g(2) = g(-2) = 4$, mas $2 \neq -2$
3. **Função bijetiva:** $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 3x - 2$
   - Injetiva: $3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$

- Sobrejetiva: Para todo $y \in \mathbb{R}$, $x = \frac{y+2}{3}$

3.2.6 Composição de Funções

Definição de Composição

Dadas as funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$, com $B \cap C \neq \emptyset$, a composição $g \circ f$ é definida por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

O domínio de $g \circ f$ é $\{x \in A : f(x) \in C\}$

Exemplos de Composição

1. Sejam $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x^2$

   Calcular $(g \circ f)(x)$:

   $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2(x + 1)^2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2x^2 + 4x + 2$$

   Calcular $(f \circ g)(x)$:
   $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x^2) = 2x^2 + 1$$

   Note que $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ em geral!

2. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 1$
   $(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$, para $x \geq 0$

3.2.7 Função Inversa

Definição de Função Inversa

Uma função $f : A \to B$ tem inversa $f^{-1} : B \to A$ se e somente se f é bijetiva.
A função inversa satisfaz:
$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ e } f(f^{-1}(y)) = y$$

Como Encontrar a Função Inversa

Procedimento:

1. Verificar se a função é bijetiva
2. Escrever $y = f(x)$
3. Trocar x e y: $x = f(y)$
4. Resolver para y: $y = f^{-1}(x)$

Encontrando Funções Inversas

1. **Encontrar a inversa de** $f(x) = 2x - 3$

   Passo 1: f é bijetiva (função linear com coeficiente angular não nulo)

   Passo 2: $y = 2x - 3$

   Passo 3: $x = 2y - 3$

   Passo 4: $2y = x + 3 \Rightarrow y = \frac{x+3}{2}$

   Logo: $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

Verificação:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x+3}{2} - 3 = x + 3 - 3 = x$$

2. **Encontrar a inversa de** $g(x) = x^3 + 1$

   $y = x^3 + 1 \Rightarrow x = y^3 + 1 \Rightarrow y^3 = x - 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-1}$

   Logo: $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

3.2.8 Função Homográfica

Definição de Função Homográfica

Uma função homográfica (ou função racional linear) tem a forma:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$

Características da Função Homográfica

- **Domínio:** $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$
- **Assíntota vertical:** $x = -\frac{d}{c}$
- **Assíntota horizontal:** $y = \frac{a}{c}$
- **Interseção com eixo y:** $\left(0, \frac{b}{d}\right)$ se $d \neq 0$
- **Interseção com eixo x:** $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ se $a \neq 0$

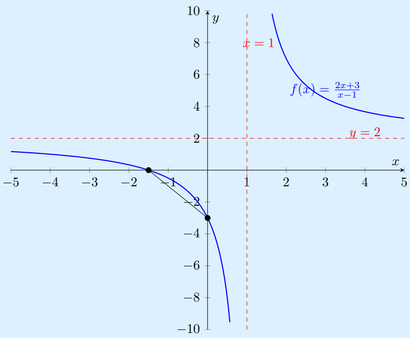
Análise de Função Homográfica

Analisar a função $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$
Identificação: $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$, $d = -1$
Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
Assíntotas:

- Vertical: $x = 1$
- Horizontal: $y = \frac{2}{1} = 2$

Interseções:

- Com eixo y: $f(0) = \frac{3}{-1} = -3 \Rightarrow (0, -3)$
- Com eixo x: $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$



Exercícios

1. **Determinar se a função $f(x) = x^3 - 3x$ é par, ímpar ou nem par nem ímpar.**
   Solução: Calculamos $f(-x)$:
   $$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$$
   Como $f(-x) = -f(x)$, a função é **ímpar**.

2. **Verificar se $g(x) = 3x + 2$ é injetiva e encontrar sua inversa.**
   Solução: Injetividade: Se $g(x_1) = g(x_2)$, então:
   $$3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$
   Logo, g é injetiva.
   Função inversa:
   $$y = 3x + 2 \Rightarrow x = 3y + 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{x-2}{3}$$
   Portanto: $g^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

3. **Sejam $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$. Encontrar $(f \circ g)(x)$ e seu domínio.**
   Solução:
   $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = (x-1) + 1 = x$$
   Domínio: Para que $g(x) = \sqrt{x-1}$ seja definida, precisamos:
   $$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$
   Logo, o domínio de $(f \circ g)(x)$ é $[1, +\infty)$.

4. **Encontrar as assíntotas da função $h(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$**
   Solução: Assíntota vertical: Ocorre quando o denominador se anula:
   $$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$
   Assíntota horizontal: Como o grau do numerador (2) é maior que o do denominador (1), não há assíntota horizontal, mas sim oblíqua.
   Fazendo a divisão: $x^2 - 1 = (x+2)(x-2) + 3$
   Logo: $h(x) = \frac{(x+2)(x-2)+3}{x+2} = x - 2 + \frac{3}{x+2}$
   Assíntota oblíqua: $y = x - 2$

5. **Determinar os intervalos de crescimento da função $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$**
   Solução: Para estudar o crescimento, analisamos o sinal da derivada:
   $$p'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$
   Pontos críticos: $p'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$
   Análise do sinal:
   - Para $x < 0$: $p'(x) > 0$ (crescente)
   - Para $0 < x < 2$: $p'(x) < 0$ (decrescente)
   - Para $x > 2$: $p'(x) > 0$ (crescente)

   Logo: p é crescente em $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ e decrescente em $(0, 2)$.

3.2.9 Propriedades Importantes das Funções

Propriedades da Composição

- A composição de funções **não é comutativa**: $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ em geral
- A composição é **associativa**: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- Se f e g são injetivas, então $f \circ g$ é injetiva
- Se f e g são sobrejetivas, então $f \circ g$ é sobrejetiva
- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ (quando as inversas existem)

Propriedades da Função Inversa

- O gráfico de f^{-1} é a **reflexão** do gráfico de f em relação à recta $y = x$
- Se f é crescente, então f^{-1} é crescente;
- Se f é decrescente, então f^{-1} é decrescente;
- O domínio de f^{-1} é a imagem de f;
- A imagem de f^{-1} é o domínio de f.

3.2.10 Transformações de Funções

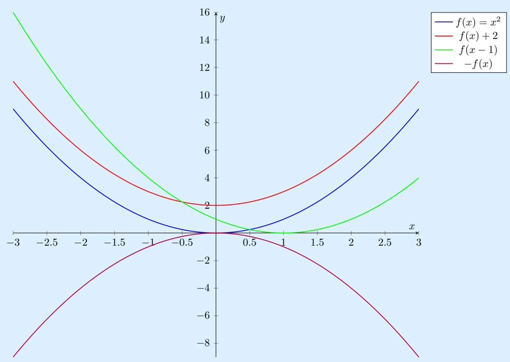
Tipos de Transformações

Dada uma função $f(x)$, podemos obter novas funções através de:

- **Translação vertical:** $f(x) + k$ (k > 0: sobe; k < 0: desce)
- **Translação horizontal:** $f(x - h)$ (h > 0: direita; h < 0: esquerda)
- **Reflexão vertical:** $-f(x)$ (reflexão no eixo x)
- **Reflexão horizontal:** $f(-x)$ (reflexão no eixo y)
- **Dilatação vertical:** $a \cdot f(x)$ (|a| > 1: alonga; 0 < |a| < 1: comprime)
- **Dilatação horizontal:** $f(bx)$ (|b| > 1: comprime; 0 < |b| < 1: alonga)

Transformações da Função

$f(x) = x^2$



Interpretações:

- $f(x) + 2 = x^2 + 2$: translação 2 unidades para cima

- $f(x-1) = (x-1)^2$: translação 1 unidade para a direita
- $-f(x) = -x^2$: reflexão no eixo x

3.2.11 Casos Especiais de Funções Homográficas

Função Hipérbole Simples

Caso particular: $f(x) = \frac{1}{x}$
Esta é uma hipérbole com:

- **Domínio:** $\mathbb{R}^*$ (reais não nulos)
- **Assíntotas:** $x = 0$ e $y = 0$
- **Simetria:** Função ímpar ($f(-x) = -f(x)$)
- **Comportamento:** Decrescente em $(-\infty, 0)$ e em $(0, +\infty)$

Função Homográfica Geral - Método de Análise

Para analisar $f(x) = \frac{3x-2}{2x+1}$:

1. **Forma padrão:** $a = 3$, $b = -2$, $c = 2$, $d = 1$
2. **Domínio:** $x \neq -\frac{1}{2}$
3. **Assíntotas:**
   - Vertical: $x = -\frac{1}{2}$
   - Horizontal: $y = \frac{3}{2}$
4. **Interseções:**
   - Eixo x: $3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$
   - Eixo y: $f(0) = \frac{-2}{1} = -2$
5. **Comportamento:** Como $ad - bc = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 = 7 > 0$, a função é crescente em cada ramo.

3.2.12 Aplicações Práticas

Problemas do Cotidiano

1. **Conversão de temperaturas:**
$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$
   Esta é uma função linear que converte Fahrenheit para Celsius.
   Função inversa: $F = \frac{9}{5}C + 32$
2. **Custo de produção:**
   Uma empresa tem custo fixo de R$ 1000 e custo variável de R$ 15 por unidade:
$$C(x) = 1000 + 15x$$
   onde x é o número de unidades produzidas.
3. **Concentração de medicamento:**
   A concentração de um medicamento no sangue após t horas pode ser modelada por:
$$C(t) = \frac{5t}{t^2 + 1}$$

Esta função homográfica mostra como a concentração aumenta rapidamente e depois diminui.

3.3 Função real de variável natural

3.3.1 Definição de Sucessão

As **sucessões** (ou sequências) são funções especiais que associam a cada número natural um número real, constituindo uma ferramenta fundamental para o estudo de padrões e comportamentos límite.

Definição

Uma **sucessão** é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n um número real a_n.
Representações:

- **Notação funcional:** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (a_n)
- **Sequência de termos:** $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$
- **Termo geral:** $a_n = f(n)$ (fórmula que define cada termo)

Terminologia:

- a_n é o **termo geral** ou **n-ésimo termo**
- a_1 é o **primeiro termo**
- n é a **ordem** do termo

Exemplos básicos:
- $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ onde $a_n = 2n - 1$
- $(2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ onde $a_n = 2^n$
- $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ onde $a_n = \frac{1}{n}$

Formas de definição:
- **Fórmula explícita:** $a_n = n^2 + 1$
- **Recorrência:** $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$
- **Enumeração:** Listagem dos primeiros termos

Exemplo: Determinando Termos de uma Sucessão

Problema: Dada a sucessão com termo geral $a_n = \frac{n^2-1}{n+1}$, determine: a) Os cinco primeiros termos b) O décimo termo c) Simplifique o termo geral

Solução:
a) Calculando os primeiros termos:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1^2-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0 \\ a_2 &= \frac{2^2-1}{2+1} = \frac{3}{3} = 1 \\ a_3 &= \frac{3^2-1}{3+1} = \frac{8}{4} = 2 \\ a_4 &= \frac{4^2-1}{4+1} = \frac{15}{5} = 3 \\ a_5 &= \frac{5^2-1}{5+1} = \frac{24}{6} = 4 \end{aligned}$$

b) O décimo termo:

$$a_{10} = \frac{10^2-1}{10+1} = \frac{99}{11} = 9$$

c) Simplificando o termo geral:

$$a_n = \frac{n^2-1}{n+1} = \frac{(n-1)(n+1)}{n+1} = n - 1 \quad (n \neq -1)$$

Resposta: $(0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ com $a_n = n - 1$

3.3.2 Classificação de Sucessões

Sucessões Monótonas

Uma sucessão (a_n) é classificada quanto à monotonia:
1. Crescente: $a_{n+1} \geq a_n$ para todo n **2. Estritamente crescente:** $a_{n+1} > a_n$ para todo n **3. Decrescente:** $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n **4. Estritamente decrescente:** $a_{n+1} < a_n$ para todo n **5. Constante:** $a_{n+1} = a_n$ para todo n **6. Não monótona:** Não satisfaz nenhuma das condições anteriores

Sucessões Limitadas

Uma sucessão pode ser classificada quanto aos seus limites:

Majorada:	Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$ para todo n
Minorada:	Existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq m$ para todo n
Limitada:	É simultaneamente majorada e minorada
Ilimitada:	Não é limitada

Sucessões Especiais

1. Infinitamente Grande:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

2. Infinitamente Pequena (Infinitésimo):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

3. Convergente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{(onde } L \text{ é um número real)}$$

4. Divergente: Não possui limite finito (pode ser infinitamente grande ou oscilar)

Exemplo: Classificação de Sucessões

Classifique as seguintes sucessões:

1. $a_n = 2n + 1$: $(3, 5, 7, 9, 11, \ldots)$ **Classificação:** - Estritamente crescente $(a_{n+1} = 2n + 3 > 2n + 1 = a_n)$ - Não majorada (infinitamente grande) - Minorada (por 3) - Divergente
2. $b_n = \frac{1}{n}$: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ **Classificação:** - Estritamente decrescente - Majorada (por 1) e minorada (por 0) - Limitada - Infinitamente pequena (convergente para 0)
3. $c_n = (-1)^n$: $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ **Classificação:** - Não monótona - Limitada (entre -1 e 1) - Divergente (oscila entre -1 e 1)
4. $d_n = \frac{n}{n+1}$: $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right)$ **Classificação:** - Estritamente crescente - Limitada (entre 0 e 1) - Convergente para 1

3.3.3 Convergência e Divergência

Definição de Limite

Uma sucessão (a_n) **converge** para um limite L se:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Intuitivamente: os termos da sucessão se aproximam arbitrariamente de L quando n cresce.

Definição formal ($\varepsilon - \delta$): Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Propriedades dos Limites

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, então:
1. Soma: $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
2. Produto: $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
3. Quociente: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ (se $B \neq 0$)
4. Potência: $\lim_{n\to\infty}(a_n)^k = A^k$
Limites importantes:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ (para $p > 0$)
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ (para $a > 0$)
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Exemplo: Calculando Limites

Problema: Calcule os limites: a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{2n^2-5n+3}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^2+1}+n}$

Soluções:
a) Para funções racionais, dividir pelo maior grau:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{2n^2-5n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}} = \frac{3+0-0}{2-0+0} = \frac{3}{2}$$

b) Racionalizar multiplicando pelo conjugado:

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^2+1}+n} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{(n^2+1)-n^2}{(\sqrt{n^2+1}+n)^2} = \frac{1}{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}$$

Como $\sqrt{n^2+1}+n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{n^2+1}+n)^2} = 0$$

Respostas: a) $\frac{3}{2}$; b) 0

3.3.4 Progressão Aritmética (PA)

Definição de PA

Uma **Progressão Aritmética (PA)** é uma sucessão onde cada termo, a partir do segundo, é obtido somando uma constante r (razão) ao termo anterior.
Definição: $a_{n+1} = a_n + r$ para todo n
Fórmula do Termo Geral:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Fórmula da Soma dos n Primeiros Termos:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)r]}{2}$$

Classificação:
- Se $r > 0$: PA crescente
- Se $r = 0$: PA constante
- Se $r < 0$: PA decrescente

Propriedades:
- Três termos consecutivos: a_{n-1}, a_n, a_{n+1} satisfazem $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$
- Em uma PA finita: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$ (propriedade telescópica)

Exemplo: Problemas com PA

Problema: Em uma PA, o 5ž termo é 17 e o 12ž termo é 38. Determine: a) O primeiro termo e a razão b) O termo geral c) A soma dos 20 primeiros termos

Solução:
a) Sistema de equações:

$$a_5 = a_1 + 4r = 17 \tag{3.1}$$
$$a_{12} = a_1 + 11r = 38 \tag{3.2}$$

Subtraindo a primeira da segunda:

$$7r = 21 \Rightarrow r = 3$$

Substituindo em $a_1 + 4r = 17$:

$$a_1 + 4(3) = 17 \Rightarrow a_1 = 5$$

b) Termo geral:

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$$

c) Soma dos 20 primeiros termos:

$$a_{20} = 3(20) + 2 = 62$$

$$S_{20} = \frac{20(a_1 + a_{20})}{2} = \frac{20(5 + 62)}{2} = \frac{20 \cdot 67}{2} = 670$$

Respostas: a) $a_1 = 5$, $r = 3$; b) $a_n = 3n + 2$; c) $S_{20} = 670$

3.3.5 Progressão Geométrica (PG)

Definição de PG

Uma **Progressão Geométrica (PG)** é uma sucessão onde cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando uma constante q (razão) pelo termo anterior.
Definição: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ para todo n (com $a_n \neq 0$)
Fórmula do Termo Geral:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Fórmula da Soma dos n Primeiros Termos:

$$S_n = \begin{cases} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, & \text{se } q \neq 1 \\ n \cdot a_1, & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

Soma dos Infinitos Termos (se $|q| < 1$):

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Classificação das PGs

Dependendo da razão q e do primeiro termo a_1:

$q > 1$:	PG crescente (se $a_1 > 0$) ou decrescente (se $a_1 < 0$)
$q = 1$:	PG constante
$0 < q < 1$:	PG decrescente (se $a_1 > 0$) ou crescente (se $a_1 < 0$)
$q = 0$:	PG com termos nulos (a partir do segundo)
$-1 < q < 0$:	PG alternante convergente
$q = -1$:	PG alternante
$q < -1$:	PG alternante divergente

Exemplo: Problemas com PG

Problema: Uma cultura de bactérias dobra a cada hora. Se inicialmente há 1000 bactérias: a) Quantas haverá após 8 horas? b) Qual a população total acumulada nas primeiras 10 horas? c) Se a tendência continuasse indefinidamente, qual seria o limite da soma?

Solução:
Identificando a PG: - $a_1 = 1000$ (população inicial) - $q = 2$ (dobra a cada hora)
a) Após 8 horas (9ž termo):

$$a_9 = 1000 \cdot 2^{9-1} = 1000 \cdot 2^8 = 1000 \cdot 256 = 256.000 \text{ bactérias}$$

b) População acumulada em 10 horas:

$$S_{10} = \frac{1000(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1000(1024 - 1) = 1000 \cdot 1023 = 1.023.000 \text{ bactérias}$$

c) Como $q = 2 > 1$, a série diverge:

$$S_\infty = +\infty \text{ (não existe limite finito)}$$

Respostas: a) 256.000 bactérias; b) 1.023.000 bactérias; c) Diverge

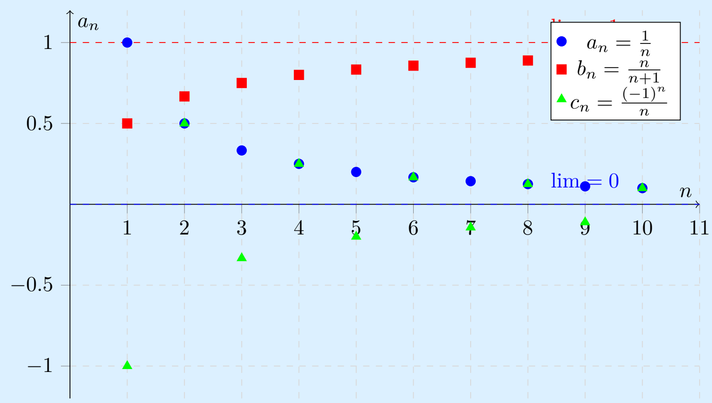
3.3.6 Representação Gráfica de Sucessões

Gráfico 1: Comportamento de Sucessões Convergentes

Comparação entre diferentes tipos de convergência:

1. $a_n = \frac{1}{n}$ (convergente para 0)
2. $b_n = \frac{n}{n+1}$ (convergente para 1)
3. $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ (convergente para 0, alternante)
   Análise dos primeiros termos:

n	$a_n = \frac{1}{n}$	$b_n = \frac{n}{n+1}$	$c_n = \frac{(-1)^n}{n}$
1	1,000	0,500	-1,000
2	0,500	0,667	0,500
3	0,333	0,750	-0,333
4	0,250	0,800	0,250
5	0,200	0,833	-0,200
10	0,100	0,909	0,100



Observações importantes:

- A sucessão azul $\frac{1}{n}$ decresce monotonamente para 0
- A sucessão vermelha $\frac{n}{n+1}$ cresce monotonamente para 1

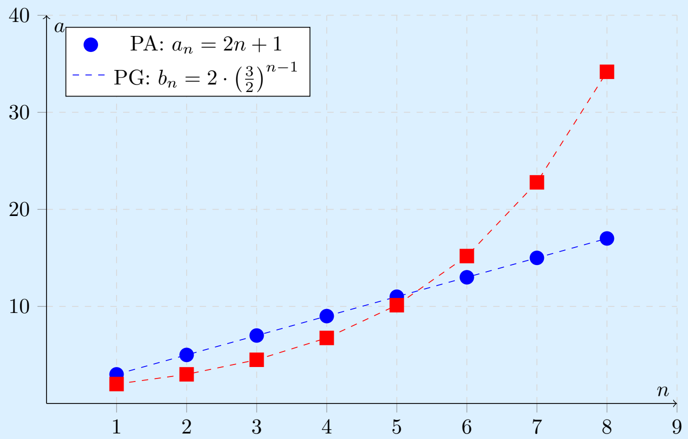
- A sucessão verde $\frac{(-1)^n}{n}$ oscila mas converge para 0
- Todas são limitadas e convergentes

Gráfico 2: Progressões Aritmética e Geométrica

Comparação entre PA e PG:

1. PA: $a_n = 2n + 1$ (termos: 3, 5, 7, 9, 11, ...)
2. PG: $b_n = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ (termos: 2, 3, 4.5, 6.75, ...)
   Valores dos primeiros termos:

n	PA: $a_n = 2n + 1$	PG: $b_n = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
1	3,00	2,00
2	5,00	3,00
3	7,00	4,50
4	9,00	6,75
5	11,00	10,13
6	13,00	15,19
7	15,00	22,78
8	17,00	34,18



Características observadas:

- **PA (azul):** Crescimento linear constante (razão $r = 2$)
- **PG (vermelha):** Crescimento exponencial acelerado (razão $q = 1,5$)
- A PG ultrapassa a PA rapidamente devido ao crescimento exponencial
- Ambas são sucessões crescentes e divergentes

3.3.7 Problemas Práticos

Aplicações das Progressões

As progressões aparecem em diversas situações práticas:

PA - Situações:
- Salários com aumentos fixos
- Contagem de objetos em disposição regular
- Problemas de tempo e distância

PG - Situações:
- Juros compostos
- Crescimento populacional

- Decaimento radioativo
- Propagação de vírus

Exemplo: Problema de Juros Compostos (PG)

Problema: João investe R$ 10.000,00 em uma aplicação que rende 5a) Quanto cada um terá após 12 meses? b) Em que mês Maria terá mais dinheiro que João?

Solução:
Modelando como PG: - João: $J_n = 10000 \cdot (1,05)^n$ - Maria: $M_n = 8000 \cdot (1,08)^n$
a) Após 12 meses:

$$J_{12} = 10000 \cdot (1,05)^{12} = 10000 \cdot 1,7959 = R\$17.959,00$$

$$M_{12} = 8000 \cdot (1,08)^{12} = 8000 \cdot 2,5182 = R\$20.146,00$$

b) Para encontrar quando $M_n > J_n$:

$$8000 \cdot (1,08)^n > 10000 \cdot (1,05)^n$$

$$\frac{(1,08)^n}{(1,05)^n} > \frac{10000}{8000}$$

$$\left(\frac{1,08}{1,05}\right)^n > 1,25$$

$$(1,0286)^n > 1,25$$

Aplicando logaritmo:

$$n \log(1,0286) > \log(1,25)$$

$$n > \frac{\log(1,25)}{\log(1,0286)} = \frac{0,0969}{0,0122} \approx 7,9$$

Portanto, a partir do 8ž mês Maria terá mais dinheiro.
Respostas: a) João: R$ 17.959,00, Maria: R$ 20.146,00; b) A partir do 8ž mês

Exemplo: Problema de Empilhamento (PA)

Problema: Uma pilha de madeira é organizada de forma que a primeira fileira tem 25 toras, a segunda tem 23 toras, a terceira tem 21 toras, e assim por diante, diminuindo 2 toras por fileira. a) Quantas toras há na 10ł fileira? b) Quantas fileiras completas podem ser formadas? c) Qual o total de toras na pilha?

Solução:
Identificando a PA: - $a_1 = 25$, $r = -2$ - Termo geral: $a_n = 25 + (n-1)(-2) = 27 - 2n$
a) Toras na 10ł fileira:

$$a_{10} = 27 - 2(10) = 27 - 20 = 7 \text{ toras}$$

b) Para fileiras completas, precisamos $a_n > 0$:

$$27 - 2n > 0 \Rightarrow n < 13,5$$

Portanto, 13 fileiras completas (a 13ł tem $27 - 26 = 1$ tora).
c) Total de toras:

$$a_{13} = 27 - 2(13) = 1$$

$$S_{13} = \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = \frac{13(25+1)}{2} = \frac{13 \times 26}{2} = 169 \text{ toras}$$

Respostas: a) 7 toras; b) 13 fileiras; c) 169 toras totais

3.3.8 Sucessões de Recorrência

Definição de Recorrência

Uma **sucessão de recorrência** é definida por:

- Um ou mais termos iniciais
- Uma relação que permite calcular cada termo a partir dos anteriores

Tipos comuns:

- **Linear de 1ł ordem:** $a_{n+1} = ca_n + d$
- **Linear de 2ł ordem:** $a_{n+2} = ca_{n+1} + da_n$
- **Não linear:** $a_{n+1} = f(a_n)$ onde f não é linear

Exemplo: Sucessão de Fibonacci

Definição: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 1$
Primeiros termos: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...
Propriedades interessantes:

1. **Razão áurea:** $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$
2. **Fórmula de Binet:**
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$
3. **Propriedade de soma:**
$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Verificação da fórmula de Binet para F_5:

$$F_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[(1,618)^5 - (-0,618)^5] = \frac{1}{\sqrt{5}}[11,09 + 0,09] = 5✓$$

Exercícios

1. Determine se a sucessão $a_n = \frac{3n^2+2n-1}{n^2+1}$ é convergente. Em caso afirmativo, calcule o limite.
   Solução:
   Para determinar o limite, dividir numerador e denominador por n^2:
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$
   Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$:
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3+0-0}{1+0} = 3$$
   Resposta: A sucessão converge para 3.

2. Uma PA tem primeiro termo 7 e a soma dos 10 primeiros termos é 160. Determine a razão e o 15ž termo.
   Solução:
   Dados: $a_1 = 7$, $S_{10} = 160$

Usando a fórmula da soma:

$$S_{10} = \frac{10[2a_1 + (10-1)r]}{2} = 5[14 + 9r] = 70 + 45r$$

Substituindo:

$$160 = 70 + 45r \Rightarrow 90 = 45r \Rightarrow r = 2$$

O 15ž termo:

$$a_{15} = 7 + (15-1) \cdot 2 = 7 + 28 = 35$$

Resposta: $r = 2$ e $a_{15} = 35$.

3. Em uma PG, o 3ž termo é 12 e o 6ž termo é 96. Determine o primeiro termo, a razão e a soma dos 8 primeiros termos.
   Solução:
   Sistema de equações:

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 12 \tag{3.3}$$
$$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 96 \tag{3.4}$$

   Dividindo a segunda pela primeira:

$$\frac{a_1 \cdot q^5}{a_1 \cdot q^2} = \frac{96}{12} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

   Substituindo em $a_1 \cdot q^2 = 12$:

$$a_1 \cdot 4 = 12 \Rightarrow a_1 = 3$$

   Soma dos 8 primeiros termos:

$$S_8 = \frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1} = 3(256 - 1) = 3 \cdot 255 = 765$$

   Resposta: $a_1 = 3$, $q = 2$, $S_8 = 765$.

4. Uma bola é largada de uma altura de 10 metros. A cada quique, ela atinge 80a) A altura após o 5ž quique b) A distância total percorrida pela bola
   Solução:
   a) Modelando como PG: - Altura inicial: $h_0 = 10$ m - Após cada quique: $h_n = 10 \cdot (0,8)^n$
   Após o 5ž quique:

$$h_5 = 10 \cdot (0,8)^5 = 10 \cdot 0,32768 = 3,28 \text{ m}$$

   b) Distância total: A bola desce 10 m inicialmente, depois sobe e desce as alturas dos quiques.
   Distância = 10 + 2(soma infinita dos quiques)

$$\text{Soma dos quiques} = \frac{10 \cdot 0,8}{1 - 0,8} = \frac{8}{0,2} = 40$$

$$\text{Distância total} = 10 + 2 \cdot 40 = 90 \text{ m}$$

   Resposta: a) 3,28 m; b) 90 m.

5. Determine a soma da série infinita: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$
   Solução:
   Identificando a PG infinita: - $a_1 = 1$ - $q = \frac{1}{3}$ (cada termo é $\frac{1}{3}$ do anterior)
   Como $|q| = \frac{1}{3} < 1$, a série converge:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

   Resposta: $S_\infty = \frac{3}{2} = 1,5$.

3.4 Limites e continuidade de funções

Os **limites** são conceitos fundamentais do Cálculo que descrevem o comportamento de uma função quando a variável independente se aproxima de um determinado valor. A **continuidade** está intimamente relacionada aos limites e descreve se uma função não apresenta "quebras"ou "saltos"em um ponto.

Definição Intuitiva

O limite de uma função $f(x)$ quando x se aproxima de um valor a é o valor que $f(x)$ **tende a assumir**, mesmo que a função não esteja definida exatamente no ponto $x = a$.

- O limite descreve o **comportamento** da função próximo ao ponto, não necessariamente no ponto.
- Uma função é **contínua** em um ponto quando não há "saltos", "buracos"ou "quebras"neste ponto.
- Limites são essenciais para definir derivadas e integrais.

3.4.1 Definição de Limite

Definição Formal

O limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se os valores de $f(x)$ se aproximam arbitrariamente de L quando x se aproxima de a, independentemente de x ser maior ou menor que a.

Interpretação Geométrica

Graficamente, o limite representa o valor que a função "deveria ter"no ponto $x = a$, observando o comportamento da curva ao redor deste ponto.

Limite existe: Quando a função se aproxima do mesmo valor tanto pela esquerda quanto pela direita de a.

Limite não existe: Quando:

- Os limites laterais são diferentes
- A função cresce infinitamente (tende ao infinito)
- A função oscila indefinidamente

Importante: O valor de $f(a)$ pode ser diferente de $\lim_{x \to a} f(x)$, ou até mesmo $f(a)$ pode não existir.

3.4.2 Limite Lateral (Direito e Esquerdo)

Limites Laterais

Limite pela esquerda (ou limite à esquerda):

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$

Considera apenas valores de x menores que a (aproximando pela esquerda).

Limite pela direita (ou limite à direita):

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

Considera apenas valores de x maiores que a (aproximando pela direita).

Condição para existência do limite:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Exemplo: Análise de Limites Laterais

Problema: Considere a função definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \\ 2x-1, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Calcule $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Solução:

1. **Limite pela esquerda:** Para $x \to 2^-$, usamos $f(x) = x + 1$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+1) = 2 + 1 = 3$$

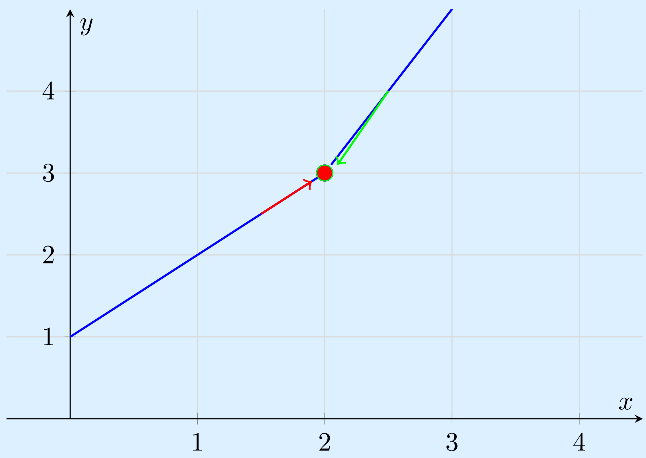
2. **Limite pela direita:** Para $x \to 2^+$, usamos $f(x) = 2x - 1$:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x-1) = 2(2) - 1 = 3$$

3. **Limite bilateral:** Como $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

Análise de Limites Laterais em $x = 2$



Resposta:

$$\boxed{\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 3}$$

3.4.3 Cálculo de Limites com Gráficos

Interpretação Gráfica de Limites

Para calcular limites usando gráficos, devemos observar:

1. **Aproximação pela esquerda:** Seguir a curva da esquerda até próximo ao ponto de interesse.
2. **Aproximação pela direita:** Seguir a curva da direita até próximo ao ponto de interesse.

3. **Valor do limite:** Se ambas as aproximações levam ao mesmo valor y, este é o limite.
4. **Descontinuidades:** Identificar "buracos", "saltos"ou "assíntotas"no gráfico.

Exemplo: Leitura de Limites em Gráficos

Situações comuns encontradas em gráficos:

1. **Função contínua:** Se o gráfico não apresenta quebras em $x = a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

2. **Descontinuidade removível ("buraco"):** Se há um "buraco"no gráfico em $x = a$, mas a curva se aproxima de um valor L:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \quad \text{mas } f(a) \text{ pode não estar definido}$$

3. **Descontinuidade de salto:** Se o gráfico "salta"de um valor para outro em $x = a$:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \text{ não existe}$$

4. **Assíntota vertical:** Se o gráfico se aproxima de uma reta vertical $x = a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{(limite infinito)}$$

3.4.4 Cálculo de Limites com Expressões Analíticas

Propriedades dos Limites

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] &= L + M \quad \text{(soma)} \\
\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] &= L - M \quad \text{(diferença)} \\
\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] &= L \cdot M \quad \text{(produto)} \\
\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{L}{M}, \text{ se } M \neq 0 \quad \text{(quociente)} \\
\lim_{x \to a} [f(x)]^n &= L^n \quad \text{(potência)}
\end{aligned}$$

Técnicas para Cálculo de Limites

Substituição direta: Se a função é contínua em $x = a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Fatoração: Para formas indeterminadas $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) \text{ fatorado}}{g(x) \text{ fatorado}}$$

Racionalização: Para expressões com radicais.

Limites fundamentais: Como $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Exemplo: Cálculo Analítico de Limites

Problema: Calcule $\lim_{x\to3} \frac{x^2-9}{x-3}$.

Solução:

1. **Verificar se há indeterminação:** Substituindo $x = 3$ diretamente:
$$\frac{3^2-9}{3-3} = \frac{9-9}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{(forma indeterminada)}$$
2. **Fatorar o numerador:**
$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$
3. **Simplificar a fração:**
$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3, \quad x \neq 3$$
4. **Calcular o limite:**
$$\lim_{x\to3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to3}(x+3) = 3+3 = 6$$

Resposta:
$$\boxed{\lim_{x\to3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6}$$

3.4.5 Continuidade e Descontinuidade

Definição de Continuidade

Uma função $f(x)$ é **contínua** em $x = a$ se e somente se:

1. $f(a)$ está definido (existe)
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Se qualquer uma dessas condições falha, a função é **descontínua** em $x = a$.

Tipos de Descontinuidade

Descontinuidade removível: Quando o limite existe, mas $f(a)$ não está definido ou $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$. Pode ser "corrigida"redefinindo a função no ponto.

Descontinuidade de salto: Quando os limites laterais existem mas são diferentes:
$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Descontinuidade infinita: Quando pelo menos um dos limites laterais é infinito:
$$\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$$

Descontinuidade oscilatória: Quando a função oscila indefinidamente próximo ao ponto (rara).

Exemplo: Análise de Continuidade

Problema: Analise a continuidade da função:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 3, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

em $x = 1$.

Solução:

1. **Verificar se $f(1)$ está definido:** $f(1) = 3$ (está definido)

2. **Calcular o limite:** Para $x \neq 1$:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$$

   Então:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

3. **Comparar $f(1)$ e $\lim_{x\to 1} f(x)$:** $f(1) = 3$ e $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

   Como $f(1) \neq \lim_{x\to 1} f(x)$, a função é **descontínua** em $x = 1$.

4. **Tipo de descontinuidade:** Descontinuidade **removível**, pois o limite existe. Para tornar a função contínua, bastaria redefinir $f(1) = 2$.

Resposta:

$$\boxed{\text{A função é descontínua em } x = 1 \text{ (descontinuidade removível)}}$$

3.4.6 Estudo da Continuidade a partir de Gráficos e Expressões

Análise Gráfica da Continuidade

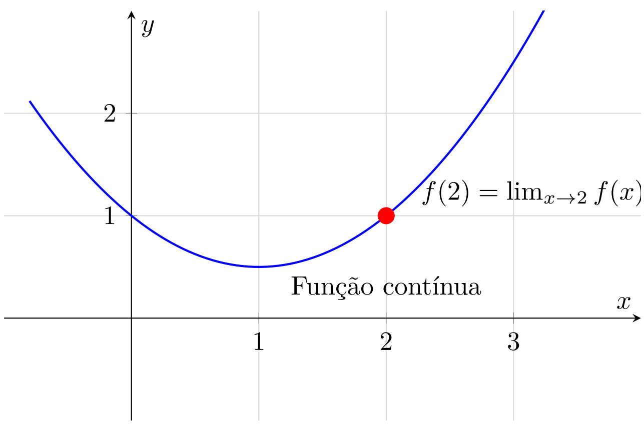
Para verificar continuidade através de gráficos:

1. **Trace uma linha vertical** no ponto $x = a$.
2. **Observe se a curva** tem alguma interrupção, salto ou buraco.
3. **Verifique se** é possível desenhar o gráfico sem tirar o lápis do papel.
4. **Identifique o tipo** de descontinuidade, se houver.

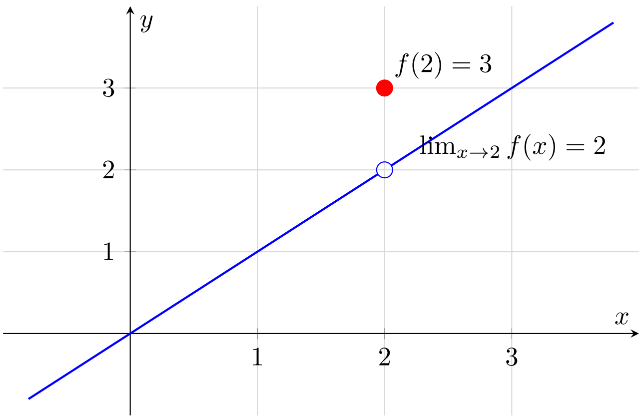
Indicadores visuais:

- **Buraco:** descontinuidade removível
- **Salto:** descontinuidade de salto
- **Assíntota vertical:** descontinuidade infinita

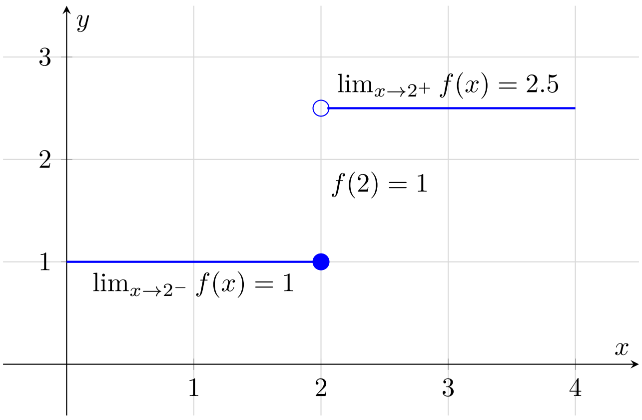
Função Contínua em Todos os Pontos



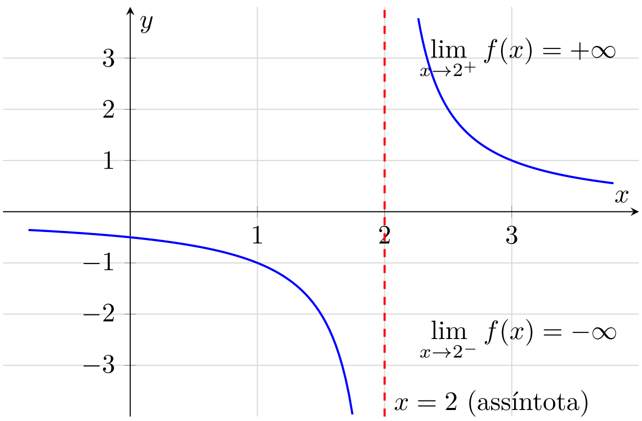
Descontinuidade Removível em $x = 2$



Descontinuidade de Salto em $x = 2$



Assíntota Vertical em $x = 2$



Exemplo: Análise Completa de Continuidade

Problema: Para que valores de k a função abaixo é contínua em $x = 2$?

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x < 2 \\ k, & \text{se } x = 2 \\ 3x - 1, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Solução:

1. **Calcular os limites laterais:**

   Limite pela esquerda:

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$$

Limite pela direita:

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+}(3x-1) = 3(2)-1 = 5$$

2. **Verificar a existência do limite:** Como $\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^+} g(x) = 5$:

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 5$$

3. **Condição para continuidade:** Para que $g(x)$ seja contínua em $x = 2$:

$$g(2) = \lim_{x\to 2} g(x)$$

Portanto:

$$k = 5$$

Resposta:

$$\boxed{k = 5}$$

3.4.7 Exemplos Práticos

Exemplo: Limites Especiais

1. **Limite com radical:**

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

Solução: Multiplicar pelo conjugado:

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

2. **Limite infinito:**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}$$

Como $x \to 0^+$, temos $x^2 \to 0^+$, então $\frac{1}{x^2} \to +\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

3. **Limite no infinito:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x}{x^2-1}$$

Dividindo numerador e denominador por x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0}{1-0} = 2$$

3.4.8 Exercícios Resolvidos

Exercícios

1. Calcule $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$.

   Solução:

   Substituição direta resulta em $\frac{0}{0}$, então fatoramos:

   Numerador: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ **Denominador:** $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

   $$\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}, \quad x \neq 1$$

   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

   Resposta: $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{3}{2}$.

2. Determine se a função $h(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ 4-x, & x > 2 \end{cases}$ é contínua em $x = 2$.

   Solução:

   1) Valor da função: $h(2) = 2 + 1 = 3$ (pela primeira regra, pois $2 \leq 2$)

   2) Limites laterais:

   $$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+1) = 2+1 = 3$$
   $$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} (4-x) = 4-2 = 2$$

   3) Como $\lim_{x\to 2^-} h(x) \neq \lim_{x\to 2^+} h(x)$**, o limite** $\lim_{x\to 2} h(x)$ **não existe.**

   Resposta: A função é **descontínua** em $x = 2$ (descontinuidade de salto).

3. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$.

   Solução:

   Usamos a propriedade $\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 3 \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x}$$

   Fazendo a substituição $u = 3x$, quando $x \to 0$, temos $u \to 0$:

   $$3 \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 3 \cdot 1 = 3$$

   Resposta: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$.

4. Para que valor de a a função $f(x) = \begin{cases} ax+2, & x < 1 \\ x^2+1, & x \geq 1 \end{cases}$ é contínua em $x = 1$?

   Solução:

   1) Valor da função: $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ (pela segunda regra, pois $1 \geq 1$)

   2) Limites laterais:

   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax+2) = a(1) + 2 = a + 2$$
   $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+1) = 1^2 + 1 = 2$$

3) Para continuidade: Precisamos que os limites laterais sejam iguais:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$a + 2 = 2 \Rightarrow a = 0$$

Verificação: Com $a = 0$:

$$f(1) = 2, \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

Portanto, $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$.

Resposta: $a = 0$.

5. Calcule $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{2x^3 + x - 5}$.

Solução:

Para limites no infinito com polinômios, dividimos numerador e denominador pelo maior grau de x (que é x^3):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{2x^3 + x - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{5}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x^3}}$$

Quando $x \to \infty$, todos os termos com x no denominador tendem a zero:

$$= \frac{3 - 0 + 0}{2 + 0 - 0} = \frac{3}{2}$$

Resposta: $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{2x^3 + x - 5} = \frac{3}{2}$.

3.5 Cálculo Diferencial

A **derivada** de uma função representa a taxa instantânea de variação dessa função em relação à sua variável independente. Geometricamente, a derivada em um ponto corresponde ao coeficiente angular da reta tangente à curva nesse ponto.

Definição de Derivada

Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo que contém o ponto $x = a$. A derivada de f no ponto a é definida como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Quando esse limite existe, dizemos que f é derivável em a.

Notações equivalentes: $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $D_x f(x)$

3.5.1 Derivada por Definição

Método da Definição

Para calcular a derivada de $f(x)$ usando a definição:

1. Calcular $f(x+h)$
2. Formar a diferença $f(x+h) - f(x)$
3. Calcular $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
4. Calcular $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Derivada por Definição - Função Quadrática

Encontrar a derivada de $f(x) = x^2$ usando a definição.

Passo 1: Calcular $f(x+h)$

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

Passo 2: Formar a diferença

$$f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

Passo 3: Calcular o quociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

Passo 4: Calcular o limite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x$$

Resultado: $\boxed{f'(x) = 2x}$

Derivada por Definição - Função Racional

Encontrar a derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ usando a definição.

Passo 1: Calcular $f(x+h)$

$$f(x+h) = \frac{1}{x+h}$$

Passo 2: Formar a diferença

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{x(x+h)} = \frac{-h}{x(x+h)}$$

Passo 3: Calcular o quociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-h}{x(x+h)} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

Passo 4: Calcular o limite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$$

Resultado: $\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$

3.5.2 Derivadas Tabeladas

Tabela de Derivadas Básicas

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0 \quad \text{(constante)}$
2. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad \text{(regra da potência)}$
3. $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
4. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
5. $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
6. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$
7. $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
8. $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
9. $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

Regras de Derivação

1. **Regra da Soma:**
$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$
2. **Regra do Produto:**
$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
3. **Regra do Quociente:**
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$
4. **Regra da Cadeia:**
$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Aplicação das Regras de Derivação

Calcular as derivadas das seguintes funções:
a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 1$
Aplicando a regra da soma e da potência:

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 1 - 0 = 12x^3 - 6x^2 + 5$$

b) $g(x) = x^2 \sin x$
Aplicando a regra do produto:

$$g'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

c) $h(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$
Aplicando a regra do quociente:

$$h'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2+1) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2}$$

d) $k(x) = e^{x^2+3x}$
Aplicando a regra da cadeia:

$$k'(x) = e^{x^2+3x} \cdot (2x+3)$$

3.5.3 Estudo de Funções

Pontos Críticos e Classificação

Um ponto $x = c$ é chamado **ponto crítico** de $f(x)$ se:

- $f'(c) = 0$, ou
- $f'(c)$ não existe

Teste da Primeira Derivada:

- Se $f'(x) > 0$ em (a, c) e $f'(x) < 0$ em (c, b), então f tem máximo local em $x = c$
- Se $f'(x) < 0$ em (a, c) e $f'(x) > 0$ em (c, b), então f tem mínimo local em $x = c$
- Se $f'(x)$ não muda de sinal em $x = c$, então f não tem extremo local em $x = c$

Estudo Completo de Função

Analisar a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
Passo 1: Encontrar a derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

Passo 2: Encontrar os pontos críticos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Passo 3: Analisar o sinal de $f'(x)$

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Sinal de $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
Comportamento de f	Crescente	Decrescente	Crescente

Passo 4: Classificar os pontos críticos

- Em $x = 0$: máximo local, pois $f'(x)$ muda de $+$ para $-$
- Em $x = 2$: mínimo local, pois $f'(x)$ muda de $-$ para $+$

Passo 5: Calcular os valores extremos

- $f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 2 = 2$ (máximo local)
- $f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2$ (mínimo local)

A função tem máximo local em $(0, 2)$ e mínimo local em $(2, -2)$.

3.5.4 Crescimento e Decrescimento

Critérios de Monotonia

Seja $f(x)$ uma função derivável no intervalo (a, b):

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é **estritamente crescente** em (a, b)
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é **estritamente decrescente** em (a, b)
- Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é **constante** em (a, b)

Análise de Crescimento e Decrescimento

Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$
Passo 1: Calcular a derivada

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$

Passo 2: Fatorar a derivada Observando que $x = 1$ é raiz:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$$

Portanto: $f'(x) = 4(x - 1)^3$
Passo 3: Analisar o sinal de $f'(x)$

- Para $x < 1$: $(x - 1) < 0 \Rightarrow (x - 1)^3 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$
- Para $x = 1$: $f'(1) = 0$
- Para $x > 1$: $(x - 1) > 0 \Rightarrow (x - 1)^3 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Logo:

- f é decrescente em $(-\infty, 1)$
- f é crescente em $(1, +\infty)$
- $x = 1$ é ponto de mínimo global

3.5.5 Problemas de Otimização

Metodologia para Problemas de Otimização

1. **Identificar** a grandeza a ser otimizada (maximizada ou minimizada)
2. **Definir** as variáveis e estabelecer as relações entre elas
3. **Expressar** a função objetivo em termos de uma única variável
4. **Determinar** o domínio da função objetivo
5. **Calcular** a derivada da função objetivo
6. **Encontrar** os pontos críticos
7. **Verificar** se são máximos ou mínimos (teste da segunda derivada)
8. **Considerar** os extremos do domínio

Problema de Otimização - Área Máxima

Um fazendeiro tem 240 metros de cerca para delimitar um terreno retangular adjacente a um rio. O lado junto ao rio não precisa de cerca. Qual deve ser as dimensões do terreno para que a área seja máxima?
Passo 1: Definir as variáveis Seja x a largura (perpendicular ao rio) e y o comprimento (paralelo ao rio).

Passo 2: Estabelecer as restrições Total de cerca: $2x + y = 240 \Rightarrow y = 240 - 2x$
Passo 3: Expressar a função objetivo Área: $A(x) = x \cdot y = x(240 - 2x) = 240x - 2x^2$
Passo 4: Determinar o domínio Como $x > 0$ e $y > 0$: $0 < x < 120$
Passo 5: Encontrar os pontos críticos

$$A'(x) = 240 - 4x = 0 \Rightarrow x = 60$$

Passo 6: Verificar se é máximo

$$A''(x) = -4 < 0$$

Como $A''(60) < 0$, temos um máximo.
Passo 7: Determinar as dimensões

- Largura: $x = 60$ metros
- Comprimento: $y = 240 - 2(60) = 120$ metros
- Área máxima: $A = 60 \times 120 = 7200$ mš

Resposta: O terreno deve ter $\boxed{60 \text{ m} \times 120 \text{ m}}$ para área máxima.

Exercícios

1. Calcule a derivada de $f(x) = x^3 + 2x$ usando a definição.
   Solução:
   $f(x+h) = (x+h)^3 + 2(x+h) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2x + 2h$
   $f(x+h) - f(x) = 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2h = h(3x^2 + 3xh + h^2 + 2)$
   $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 + 2$
   $f'(x) = \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2 + 2) = 3x^2 + 2$

2. Encontre os intervalos de crescimento de $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.
   Solução:
   $g'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$
   Pontos críticos: $x = 1$ e $x = 3$
   Análise de sinais:
   - $x < 1$: $g'(x) > 0$ (crescente)
   - $1 < x < 3$: $g'(x) < 0$ (decrescente)
   - $x > 3$: $g'(x) > 0$ (crescente)

   Resposta: Crescente em $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

3. Calcule a derivada de $h(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$.
   Solução:
   Usando a regra do quociente:
   $$h'(x) = \frac{(2x)(x+2) - (x^2-1)(1)}{(x+2)^2}$$
   $$= \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$$

4. Determine o ponto de mínimo de $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
   Solução:
   $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$
   $f''(x) = 2 > 0$ (confirma que é mínimo)
   $f(2) = 4 - 8 + 5 = 1$
   Resposta: Mínimo no ponto $(2, 1)$

3.6 Cálculo Integral - Noções Introdutórias

A **primitiva** ou **antiderivada** de uma função é o conceito fundamental do cálculo integral. É a operação inversa da derivação.

Definição de Primitiva

Uma função $F(x)$ é chamada de primitiva ou antiderivada de $f(x)$ se:

$$F'(x) = f(x)$$

Em outras palavras, se a derivada de $F(x)$ é igual a $f(x)$, então $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.
Notação: Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

Exemplos de Primitivas

1. Se $f(x) = 3x^2$, encontrar uma primitiva.
Como $\dfrac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$, temos que $F(x) = x^3$ é uma primitiva.
Portanto:

$$\int 3x^2\, dx = x^3 + C$$

2. Se $f(x) = \cos x$, encontrar uma primitiva.
Como $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, temos que $F(x) = \sin x$ é uma primitiva.
Portanto:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

3. Se $f(x) = e^x$, encontrar uma primitiva.
Como $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$, temos que $F(x) = e^x$ é uma primitiva.
Portanto:

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

3.6.1 Integral Indefinida

Definição de Integral Indefinida

A **integral indefinida** de uma função $f(x)$ é o conjunto de todas as suas primitivas.

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

Onde:

- $\int$ é o símbolo de integração
- $f(x)$ é o integrando
- dx indica a variável de integração
- C é a constante de integração

3.6.2 Propriedades da Integral Indefinida

Propriedades Básicas

1. Linearidade:

$$\int [af(x) + bg(x)]\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx$$

2. Integral de uma constante:

$$\int k\, dx = kx + C$$

3. Integral da soma:

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

4. Fator constante:

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

3.6.3 Integrais Fundamentais

Tabela de Integrais Básicas

1. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$
3. $\int e^x\, dx = e^x + C$
4. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
7. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
8. $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

Aplicação das Integrais Básicas

Calcular as seguintes integrais:

1. $\int (2x^3 - 5x + 3)\, dx$

$$\int (2x^3 - 5x + 3)\, dx = 2\int x^3\, dx - 5\int x\, dx + 3\int 1\, dx$$
$$= 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C$$

2. $\int (3e^x + 4\sin x)\, dx$

$$\int (3e^x + 4\sin x)\, dx = 3\int e^x\, dx + 4\int \sin x\, dx$$
$$= 3e^x + 4(-\cos x) + C = 3e^x - 4\cos x + C$$

3. $\int \frac{2x^2+3}{x}\, dx$

Primeiro, simplificamos o integrando:

$$\frac{2x^2+3}{x} = 2x + \frac{3}{x}$$

Então:

$$\int \frac{2x^2+3}{x}\, dx = \int (2x + \frac{3}{x})\, dx = 2\int x\, dx + 3\int \frac{1}{x}\, dx$$
$$= 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3\ln|x| + C = x^2 + 3\ln|x| + C$$

3.6.4 Método de Substituição

O método de substituição é uma técnica fundamental para resolver integrais mais complexas, baseada na regra da cadeia para derivadas.

Método de Substituição

Se temos uma integral da forma $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$:
Passo 1: Fazer a substituição $u = g(x)$
Passo 2: Calcular $du = g'(x)\,dx$
Passo 3: Reescrever a integral em termos de u:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Passo 4: Integrar em relação a u
Passo 5: Substituir de volta u por g(x)

Aplicação do Método de Substituição

Exemplo 1: Calcular $\int 2x(x^2+1)^5\,dx$
Passo 1: Fazer $u = x^2 + 1$
Passo 2: Então $du = 2x\,dx$
Passo 3: A integral fica:

$$\int 2x(x^2+1)^5\,dx = \int u^5\,du$$

Passo 4: Integrar:

$$\int u^5\,du = \frac{u^6}{6} + C$$

Passo 5: Substituir de volta:

$$\int 2x(x^2+1)^5\,dx = \frac{(x^2+1)^6}{6} + C$$

Exemplo 2: Calcular $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$
Passo 1: Fazer $u = \cos x$
Passo 2: Então $du = -\sin x\,dx$, ou seja, $\sin x\,dx = -du$
Passo 3: A integral fica:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{u^2}(-du) = -\int u^{-2}\,du$$

Passo 4: Integrar:

$$-\int u^{-2}\,du = -\frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{u} + C$$

Passo 5: Substituir de volta:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{\cos x} + C = \sec x + C$$

3.6.5 Integração por Partes

A integração por partes é baseada na regra do produto para derivadas e é útil para integrar produtos de funções.

Fórmula da Integração por Partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Onde:

- Escolhemos uma parte da função como u (que será derivada)
- A outra parte como dv (que será integrada para obter v)

- Calculamos du (derivada de u)
- Calculamos v (integral de dv)

Critério de escolha (LIATE):

1. **L**ogarítmicas
2. **I**nversas trigonométricas
3. **A**lgébricas (polinômios)
4. **T**rigonométricas
5. **E**xponenciais

Aplicação da Integração por Partes

Exemplo 1: Calcular $\int xe^x\,dx$
Escolha:

- $u = x \Rightarrow du = dx$
- $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

Aplicando a fórmula:

$$\int xe^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

Exemplo 2: Calcular $\int x \sin x\,dx$
Escolha:

- $u = x \Rightarrow du = dx$
- $dv = \sin x\,dx \Rightarrow v = -\cos x$

Aplicando a fórmula:

$$\int x \sin x\,dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Exemplo 3: Calcular $\int \ln x\,dx$
Escolha:

- $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$
- $dv = dx \Rightarrow v = x$

Aplicando a fórmula:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx$$

$$= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

3.6.6 Integral Definida

Definição de Integral Definida

A **integral definida** de uma função f(x) de a até b é definida como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i = a + i\Delta x$.
Teorema Fundamental do Cálculo: Se F(x) é uma primitiva de f(x), então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Cálculo de Integrais Definidas

1. Calcular $\int_0^2 x^2\,dx$
Primeiro, encontramos a primitiva: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$
Aplicando o Teorema Fundamental:

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

2. Calcular $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$
Primitiva: $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
Aplicando o Teorema Fundamental:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1$$

3. Calcular $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$
Primitiva: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C = \ln x + C$ (para $x > 0$)
Aplicando o Teorema Fundamental:

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

Exercícios

1. Calcule a integral indefinida: $\int (3x^2 - 2x + 5)\,dx$

   Solução:

$$\int (3x^2 - 2x + 5)\,dx = 3\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 5\int 1\,dx$$
$$= 3\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 5x + C = x^3 - x^2 + 5x + C$$

2. Calcule usando substituição: $\int 4x(x^2+3)^3\,dx$

   Solução: Fazendo $u = x^2 + 3$, então $du = 2x\,dx$, ou seja, $4x\,dx = 2du$

$$\int 4x(x^2+3)^3\,dx = \int u^3\cdot 2\,du = 2\int u^3\,du = 2\cdot\frac{u^4}{4} + C$$
$$= \frac{u^4}{2} + C = \frac{(x^2+3)^4}{2} + C$$

3. Calcule usando integração por partes: $\int x\cos x\,dx$

   Solução: Escolhendo $u = x$ e $dv = \cos x\,dx$:

- $du = dx$
- $v = \sin x$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x - (-\cos x) + C$$
$$= x \sin x + \cos x + C$$

4. Calcule a integral definida: $\int_0^1 (2x+1)\, dx$

   Solução: Primeiro encontramos a primitiva:

$$\int (2x+1)\, dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C = x^2 + x + C$$

   Aplicando o Teorema Fundamental:

$$\int_0^1 (2x+1)\, dx = [x^2 + x]_0^1 = (1^2 + 1) - (0^2 + 0) = 2 - 0 = 2$$

5. Calcule usando substituição: $\int_0^{\pi/4} \sin x \cos x \, dx$

   Solução: Fazendo $u = \sin x$, então $du = \cos x \, dx$

   Quando $x = 0$: $u = \sin 0 = 0$ Quando $x = \pi/4$: $u = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\int_0^{\pi/4} \sin x \cos x \, dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} u \, du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}/2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(0)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

3.7 Conjunto dos Números Complexos

Os **números complexos** surgem da necessidade de resolver equações que não possuem solução no conjunto dos números reais, como $x^2 + 1 = 0$. Eles formam um conjunto mais amplo que inclui todos os números reais e introduz a unidade imaginária.

Definição de Número Complexo

Um **número complexo** z é definido como:

$$z = a + bi$$

Onde:

- $a, b \in \mathbb{R}$ (números reais)
- i é a **unidade imaginária**, definida por $i^2 = -1$
- a é chamado de **parte real** de z: $\text{Re}(z) = a$
- b é chamado de **parte imaginária** de z: $\text{Im}(z) = b$

O conjunto dos números complexos é denotado por $\mathbb{C}$.

Casos Especiais

- Se $b = 0$: $z = a$ (número real)
- Se $a = 0$: $z = bi$ (número imaginário puro)
- Se $a = b = 0$: $z = 0$ (zero complexo)
- Se $b = 1$: $z = a + i$
- Se $a = 0$ e $b = 1$: $z = i$ (unidade imaginária)

3.7.1 Forma Algébrica

A **forma algébrica** (ou forma retangular) é a representação padrão de um número complexo como soma de uma parte real e uma parte imaginária.

Forma Algébrica

Todo número complexo z pode ser escrito na forma algébrica:

$$z = a + bi$$

Onde $a = \text{Re}(z)$ e $b = \text{Im}(z)$.
Igualdade de números complexos:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \\ \text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2) \end{cases}$$

Exemplos de Forma Algébrica

Números complexos em forma algébrica:

- $z_1 = 3 + 2i \Rightarrow \text{Re}(z_1) = 3$, $\text{Im}(z_1) = 2$
- $z_2 = -1 + 4i \Rightarrow \text{Re}(z_2) = -1$, $\text{Im}(z_2) = 4$
- $z_3 = 5 \Rightarrow \text{Re}(z_3) = 5$, $\text{Im}(z_3) = 0$
- $z_4 = -3i \Rightarrow \text{Re}(z_4) = 0$, $\text{Im}(z_4) = -3$

Verificação de igualdade: Se $z_1 = (x+1) + (2y-3)i$ e $z_2 = 4 + 5i$, para que $z_1 = z_2$:

$$\begin{cases} x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3 \\ 2y - 3 = 5 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

3.7.2 Forma Geométrica (Representação no Plano)

Os números complexos podem ser representados geometricamente no **plano complexo** (ou plano de Argand-Gauss), onde o eixo horizontal representa a parte real e o eixo vertical representa a parte imaginária.

Plano Complexo

No plano complexo:

- O eixo horizontal é chamado de **eixo real**
- O eixo vertical é chamado de **eixo imaginário**
- Cada número complexo $z = a + bi$ corresponde ao ponto (a, b)
- A distância da origem ao ponto é chamada de **módulo** de z
- O ângulo que o segmento faz com o eixo real positivo é o **argumento** de z

Forma Trigonométrica

Um número complexo $z = a + bi$ pode ser escrito na forma trigonométrica:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Onde:

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o **módulo** de z
- θ é o **argumento** de z, tal que:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \quad \text{e} \quad \sin\theta = \frac{b}{|z|}$$

Representação Geométrica

Representar geometricamente $z = 3 + 4i$:
No plano complexo:

- Parte real: $a = 3$ (coordenada x)
- Parte imaginária: $b = 4$ (coordenada y)
- Ponto correspondente: $(3, 4)$

Módulo:

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Argumento:

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53,13\text{ř}$$

Forma trigonométrica:

$$z = 5\left(\cos 53,13\text{ř} + i\sin 53,13\text{ř}\right)$$

3.7.3 Operações Básicas: Soma

Adição de Números Complexos

Para somar dois números complexos, somamos separadamente as partes reais e as partes imaginárias:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Propriedades da adição:

- **Comutativa:** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- **Associativa:** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
- **Elemento neutro:** $z + 0 = z$
- **Elemento oposto:** $z + (-z) = 0$

Subtração de Números Complexos

A subtração é definida como a adição do oposto:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Operações de Soma e Subtração

Dados $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 1 - 4i$:
Soma:

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 - 4i) = (2 + 1) + (3 - 4)i = 3 - i$$

Subtração:

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (1 - 4i) = (2 - 1) + (3 - (-4))i = 1 + 7i$$

Verificação geométrica: No plano complexo, a soma corresponde à soma vetorial dos pontos correspondentes.

3.7.4 Operações Básicas: Produto

Multiplicação de Números Complexos

Para multiplicar números complexos, usamos a propriedade distributiva e lembramos que $i^2 = -1$:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$
$$= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i + b_1 b_2(-1) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

Propriedades da multiplicação:

- **Comutativa:** $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- **Associativa:** $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
- **Elemento neutro:** $z \cdot 1 = z$
- **Distributiva:** $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Potências da Unidade Imaginária

As potências de i seguem um padrão cíclico:

$$\begin{aligned}
i^0 &= 1\\
i^1 &= i\\
i^2 &= -1\\
i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i\\
i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1\\
i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i
\end{aligned}$$

Regra geral: $i^n = i^{n \bmod 4}$

Multiplicação de Números Complexos

Calcular $(2+3i)(1-2i)$:
Aplicando a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned}
(2+3i)(1-2i) &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2i) + 3i \cdot 1 + 3i \cdot (-2i)\\
&= 2 - 4i + 3i - 6i^2\\
&= 2 - 4i + 3i - 6(-1)\\
&= 2 - 4i + 3i + 6\\
&= 8 - i
\end{aligned}$$

Cálculo de potência: Calcular i^{23}:

$$23 = 4 \cdot 5 + 3 \Rightarrow i^{23} = i^3 = -i$$

3.7.5 Conjugado de um Número Complexo

Definição de Conjugado

O **conjugado** de um número complexo $z = a + bi$ é o número complexo:

$$\overline{z} = a - bi$$

Geometricamente, o conjugado de z é o reflexo de z em relação ao eixo real.

Propriedades do Conjugado

Para números complexos z_1 e z_2:

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2}\\
\overline{z_1 - z_2} &= \overline{z_1} - \overline{z_2}\\
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\\
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)\\
\overline{\overline{z}} &= z\\
z \cdot \overline{z} &= |z|^2
\end{aligned}$$

Cálculos com Conjugados

Dado $z = 3 + 4i$:
Conjugado:

$$\overline{z} = 3 - 4i$$

Produto de z pelo seu conjugado:

$$z \cdot \overline{z} = (3+4i)(3-4i) = 9 - 12i + 12i - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$

Verificação com o módulo:

$$|z|^2 = (\sqrt{3^2+4^2})^2 = (\sqrt{25})^2 = 25$$

Logo, $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = 25$

3.7.6 Módulo de um Número Complexo

Definição de Módulo

O **módulo** (ou valor absoluto) de um número complexo $z = a + bi$ é:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geometricamente, o módulo representa a distância do ponto (a, b) à origem no plano complexo.

Propriedades do Módulo

Para números complexos z_1 e z_2:

$$\begin{aligned}
|z| \geq 0 \text{ e } |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \\
|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0) \\
|z^n| = |z|^n \\
|\overline{z}| = |z| \\
|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ (desigualdade triangular)}
\end{aligned}$$

Cálculo de Módulos

1) Módulo de $z_1 = 5 - 12i$:

$$|z_1| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

2) Módulo de $z_2 = -3 + 4i$:

$$|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

3) Verificar propriedade do produto: Primeiro, calculemos $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 \cdot z_2 = (5 - 12i)(-3 + 4i) = -15 + 20i + 36i - 48i^2 = -15 + 56i + 48 = 33 + 56i$$

Módulo do produto:

$$|z_1 \cdot z_2| = |33 + 56i| = \sqrt{33^2 + 56^2} = \sqrt{1089 + 3136} = \sqrt{4225} = 65$$

Produto dos módulos:

$$|z_1| \cdot |z_2| = 13 \cdot 5 = 65$$

Portanto, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

3.7.7 Divisão de Números Complexos

Divisão de Números Complexos

Para dividir números complexos, multiplicamos numerador e denominador pelo conjugado do denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2}$$

O resultado é:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Exemplo de divisão de Números Complexos

Calcular $\frac{3+2i}{1-i}$:

Multiplicando pelo conjugado do denominador:

$$\frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

Calculando o numerador:

$$(3+2i)(1+i) = 3 + 3i + 2i + 2i^2 = 3 + 5i - 2 = 1 + 5i$$

Calculando o denominador:

$$(1-i)(1+i) = 1 - i^2 = 1 - (-1) = 2$$

Resultado:

$$\frac{3+2i}{1-i} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} i$$

Exercícios

1. Dados $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = -1 + 4i$, calcule:

   a) $z_1 + z_2$

   b) $z_1 \cdot z_2$

   c) $|z_1|$ e $|z_2|$

   Solução:

   a) $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (-1 + 4i) = (2 - 1) + (-3 + 4)i = 1 + i$

   b) $z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i)(-1 + 4i) = -2 + 8i + 3i - 12i^2 = -2 + 11i + 12 = 10 + 11i$

   c) $|z_1| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

   $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$

2. Calcule i^{50} e i^{73}.

   Solução:

   Para i^{50}: $50 = 4 \cdot 12 + 2 \Rightarrow i^{50} = i^2 = -1$

   Para i^{73}: $73 = 4 \cdot 18 + 1 \Rightarrow i^{73} = i^1 = i$

3. Determine o número complexo z tal que $z + \overline{z} = 6$ e $z - \overline{z} = 4i$.

   Solução:

   Seja $z = a + bi$, então $\overline{z} = a - bi$.

   Das condições:

$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$
$$z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 4i \Rightarrow b = 2$$

Portanto: $z = 3 + 2i$

4. Calcule $\dfrac{4+3i}{2-i}$ e apresente o resultado na forma $a + bi$.
Solução:
Multiplicando pelo conjugado do denominador:
$$\frac{4+3i}{2-i} = \frac{(4+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8+4i+6i+3i^2}{4-i^2} = \frac{8+10i-3}{4+1} = \frac{5+10i}{5} = 1+2i$$

5. Encontre o módulo e o conjugado de $z = \frac{1+i}{1-i}$.
Solução:
Primeiro, simplificamos a fração:
$$z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+2i+i^2}{1+1} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i$$
Portanto: $z = i$
Módulo: $|z| = |i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$
Conjugado: $\overline{z} = \overline{i} = -i$

6. Resolva a equação $z^2 + 2z + 5 = 0$ no conjunto dos números complexos.
Solução:
Usando a fórmula de Bhaskara:
$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$
Portanto: $z_1 = -1 + 2i$ e $z_2 = -1 - 2i$

7. Se $z = 1 + i$, calcule z^4.
Solução:
Primeiro calculamos z^2:
$$z^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$
Agora calculamos $z^4 = (z^2)^2$:
$$z^4 = (2i)^2 = 4i^2 = 4(-1) = -4$$
Portanto: $z^4 = -4$

Fórmula de De Moivre

Para um número complexo na forma trigonométrica $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ temos que:
$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$
Esta fórmula é muito útil para calcular potências e raízes de números complexos.

Aplicação da Fórmula de De Moivre

Calcular $(1+i)^8$ usando a fórmula de De Moivre.
Passo 1: Converter para forma trigonométrica
$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Passo 2: Aplicar a fórmula de De Moivre

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8\left(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}\right)$$

$$= 2^4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16(1+0i) = 16$$

Portanto: $(1+i)^8 = 16$

3.8 Geometria Espacial

3.8.1 Conceitos Fundamentais da Geometria Espacial

Elementos da Geometria Espacial

A geometria espacial estuda figuras tridimensionais no espaço.
Elementos básicos:

- **Ponto:** Posição no espaço (sem dimensão)
- **Recta:** Conjunto infinito de pontos alinhados (uma dimensão)
- **Plano:** Superfície plana infinita (duas dimensões)
- **Espaço:** Conjunto de todos os pontos (três dimensões)

Posições relativas no espaço:

- Rectas paralelas, concorrentes ou reversas
- Planos paralelos, secantes ou coincidentes
- Recta paralela, secante ou contida num plano

3.8.2 Poliedros

Definição de Poliedro

Um **poliedro** é um sólido geométrico limitado por polígonos planos.
Elementos de um poliedro:

- **Faces:** Os polígonos que limitam o poliedro
- **Arestas:** Segmentos de intersecção entre duas faces
- **Vértices:** Pontos de encontro das arestas

Relação de Euler:

$$V - A + F = 2$$

onde V = número de vértices, A = número de arestas, F = número de faces.

Poliedros Regulares (Sólidos de Platão)

Existem apenas cinco poliedros regulares:

1. **Tetraedro:** 4 faces triangulares
2. **Cubo (Hexaedro):** 6 faces quadradas
3. **Octaedro:** 8 faces triangulares
4. **Dodecaedro:** 12 faces pentagonais
5. **Icosaedro:** 20 faces triangulares

Todos têm faces, arestas e ângulos iguais.

3.8.3 Prismas

Definição e Classificação de Prismas

Um **prisma** é um poliedro com duas faces paralelas e congruentes (bases) e faces laterais que são paralelogramos.
Elementos do prisma:

- **Bases:** Duas faces paralelas e congruentes
- **Faces laterais:** Paralelogramos
- **Altura:** Distância entre as bases
- **Arestas da base:** Lados dos polígonos das bases
- **Arestas laterais:** Segmentos que ligam vértices correspondentes das bases

Classificação:

- **Prisma recto:** Arestas laterais perpendiculares às bases
- **Prisma oblíquo:** Arestas laterais oblíquas às bases

Fórmulas para Prismas

Área lateral:

$$A_l = P_{base} \times h$$

Área total:

$$A_t = 2A_{base} + A_l$$

Volume:

$$V = A_{base} \times h$$

onde P_{base} é o perímetro da base, A_{base} é a área da base e h é a altura.

3.8.4 Pirâmides

Definição e Elementos da Pirâmide

Uma **pirâmide** é um poliedro formado por uma base poligonal e faces laterais triangulares que se encontram num vértice comum.
Elementos da pirâmide:

- **Base:** Polígono da base
- **Vértice (ápice):** Ponto onde convergem as faces laterais
- **Faces laterais:** Triângulos
- **Altura:** Distância do vértice à base
- **Apótema:** Altura de uma face lateral (em pirâmides regulares)

Fórmulas para Pirâmides

Área lateral:

$$A_l = \frac{P_{base} \times ap}{2}$$

Área total:

$$A_t = A_{base} + A_l$$

Volume:

$$V = \frac{A_{base} \times h}{3}$$

onde *ap* é a apótema da pirâmide regular.

3.8.5 Cilindros

Definição e Elementos do Cilindro

Um **cilindro** é um sólido geométrico gerado pela rotação de um rectângulo em torno de um de seus lados.
Elementos do cilindro:

- **Bases:** Dois círculos paralelos e congruentes
- **Eixo:** Recta que passa pelos centros das bases
- **Altura:** Distância entre as bases
- **Raio:** Raio das bases circulares
- **Geratriz:** Segmento que liga pontos correspondentes das bases

Classificação:

- **Cilindro recto:** Eixo perpendicular às bases
- **Cilindro oblíquo:** Eixo oblíquo às bases

Fórmulas para Cilindros

Área lateral:

$$A_l = 2\pi r h$$

Área total:

$$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$$

Volume:

$$V = \pi r^2 h$$

onde r é o raio da base e h é a altura.

3.8.6 Cones

Definição e Elementos do Cone

Um **cone** é um sólido geométrico gerado pela rotação de um triângulo rectângulo em torno de um de seus catetos.
Elementos do cone:

- **Base:** Círculo
- **Vértice (ápice):** Ponto oposto à base
- **Altura:** Distância do vértice à base
- **Raio:** Raio da base circular
- **Geratriz:** Distância do vértice a um ponto da circunferência da base

Relação pitagórica:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

onde g é a geratriz, h é a altura e r é o raio.

Fórmulas para Cones

Área lateral:

$$A_l = \pi r g$$

Área total:

$$A_t = \pi r^2 + \pi r g = \pi r(r + g)$$

Volume:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

onde r é o raio da base, h é a altura e g é a geratriz.

3.8.7 Esferas

Definição e Elementos da Esfera

Uma **esfera** é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma mesma distância (raio) de um ponto fixo (centro).
Elementos da esfera:

- **Centro:** Ponto equidistante de todos os pontos da esfera
- **Raio:** Distância do centro a qualquer ponto da esfera
- **Diâmetro:** Segmento que passa pelo centro ($d = 2r$)
- **Corda:** Segmento que liga dois pontos da esfera
- **Secção esférica:** Intersecção da esfera com um plano

Fórmulas para Esferas

Área da superfície esférica:

$$A = 4\pi r^2$$

Volume da esfera:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

onde r é o raio da esfera.

Exemplo 1: Cálculo do Volume de um Prisma

Um prisma triangular reto tem base com área $12\,\text{cm}^2$ e altura $8\,\text{cm}$. Calcule o volume.
Resolução:
Usando a fórmula do volume de um prisma:

$$V = A_{base} \times h$$

Substituindo os valores:

$$V = 12 \times 8 = 96\,\text{cm}^3$$

Resposta: O volume do prisma é $96\,\text{cm}^3$.

Exemplo 2: Área Total de uma Pirâmide

Uma pirâmide quadrada regular tem base com lado $6\,\text{cm}$ e apótema $5\,\text{cm}$. Calcule a área total.
Resolução:
Primeiro, calculamos a área da base:

$$A_{base} = 6^2 = 36\,\text{cm}^2$$

O perímetro da base é:

$$P_{base} = 4 \times 6 = 24\,\text{cm}$$

A área lateral é:

$$A_l = \frac{P_{base} \times ap}{2} = \frac{24 \times 5}{2} = 60\,\text{cm}^2$$

A área total é:

$$A_t = A_{base} + A_l = 36 + 60 = 96\,\text{cm}^2$$

Resposta: A área total da pirâmide é $96\,\text{cm}^2$.

Exemplo 3: Volume de um Cilindro

Um cilindro tem raio da base $3\,\text{cm}$ e altura $10\,\text{cm}$. Calcule o volume e a área total.
Resolução:
Volume do cilindro:

$$V = \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 10 = 90\pi\,\text{cm}^3$$

Área total do cilindro:

$$A_t = 2\pi r(r + h) = 2\pi \times 3 \times (3 + 10) = 2\pi \times 3 \times 13 = 78\pi\,\text{cm}^2$$

Resposta:

- Volume: $90\pi\,\text{cm}^3 \approx 282,7\,\text{cm}^3$
- Área total: $78\pi\,\text{cm}^2 \approx 245,0\,\text{cm}^2$

Exemplo 4: Cone - Relação entre Altura, Raio e Geratriz

Um cone tem altura $12\,\text{cm}$ e raio da base $5\,\text{cm}$. Calcule a geratriz e o volume.
Resolução:
Para encontrar a geratriz, usamos a relação pitagórica:

$$g^2 = h^2 + r^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

$$g = \sqrt{169} = 13\,\text{cm}$$

O volume do cone é:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 5^2 \times 12}{3} = \frac{300\pi}{3} = 100\pi\,\text{cm}^3$$

Resposta:

- Geratriz: $13\,\text{cm}$
- Volume: $100\pi\,\text{cm}^3 \approx 314,2\,\text{cm}^3$

Exemplo 5: Esfera - Área e Volume

Uma esfera tem raio $6\,\text{cm}$. Calcule a área da superfície esférica e o volume.
Resolução:
Área da superfície esférica:

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \times 6^2 = 4\pi \times 36 = 144\pi\,\text{cm}^2$$

Volume da esfera:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \times 6^3}{3} = \frac{4\pi \times 216}{3} = \frac{864\pi}{3} = 288\pi\,\text{cm}^3$$

Resposta:

- Área: $144\pi\,\text{cm}^2 \approx 452,4\,\text{cm}^2$
- Volume: $288\pi\,\text{cm}^3 \approx 904,8\,\text{cm}^3$

Aplicação Prática: Cálculo de Materiais de Construção

Situação: Um arquiteto precisa calcular a quantidade de tinta necessária para pintar um silo cilíndrico e a quantidade de grãos que ele pode armazenar.
Dados do problema:

- Silo cilíndrico com raio $5\,\text{m}$ e altura $15\,\text{m}$
- Será pintada apenas a superfície lateral (não as bases)
- Cada litro de tinta cobre $8\,\text{m}^2$
- Os grãos ocupam 80% da capacidade total do silo

Resolução:
1. Área lateral a ser pintada:

$$A_l = 2\pi rh = 2\pi \times 5 \times 15 = 150\pi\,\text{m}^2 \approx 471,2\,\text{m}^2$$

2. Quantidade de tinta necessária:

$$\text{Litros de tinta} = \frac{471,2}{8} \approx 58,9\,\text{litros}$$

3. Volume total do silo:

$$V = \pi r^2 h = \pi \times 5^2 \times 15 = 375\pi\,\text{m}^3 \approx 1178,1\,\text{m}^3$$

4. Capacidade útil para grãos:

$$\text{Capacidade útil} = 0,8 \times 1178,1 = 942,5\,\text{m}^3$$

Conclusão:

- Tinta necessária: aproximadamente 59 litros
- Capacidade de armazenamento: $942,5\,\text{m}^3$ de grãos

Aplicação Prática: Design de Embalagens

Situação: Uma empresa quer criar uma embalagem cilíndrica para um produto, otimizando o uso de material.
Problema: Determinar as dimensões de um cilindro que tenha volume de $500\,\text{ml}$ e use a menor quantidade possível de material.
Análise matemática:
O volume é fixo: $V = \pi r^2 h = 500\,\text{cm}^3$
Portanto: $h = \frac{500}{\pi r^2}$
A área total (material usado) é:

$$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{500}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$$

Para minimizar A_t, derivamos em relação a r:

$$\frac{dA_t}{dr} = 4\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0$$

Resolvendo: $4\pi r = \frac{1000}{r^2}$

$$r^3 = \frac{1000}{4\pi} = \frac{250}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4,31\,\text{cm}$$

E a altura correspondente:

$$h = \frac{500}{\pi \times (4,31)^2} \approx 8,62\,\text{cm}$$

Conclusão: Para minimizar o uso de material, o cilindro deve ter raio $\approx 4,3\,\text{cm}$ e altura $\approx 8,6\,\text{cm}$.

Exercícios

1. Um cubo tem aresta de 6 cm. Calcule:
   (a) A área total
   (b) O volume
2. Uma pirâmide quadrada regular tem base de lado 8 cm e altura 6 cm. Calcule o volume.
3. Um cilindro tem raio 3 cm e altura 10 cm. Calcule:
   (a) A área lateral
   (b) A área total
   (c) O volume
4. Uma esfera tem raio 5 cm. Calcule a área da superfície e o volume.
5. Um cubo tem aresta de 4 cm. Calcule:
   (a) O volume do cubo
   (b) A área total do cubo
   (c) A diagonal do cubo
6. Uma pirâmide triangular regular tem base com lado 8 cm e altura 12 cm. Calcule o volume da pirâmide. (Use: área do triângulo equilátero $= \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$)
7. Um cilindro tem volume $200\pi\,\text{cm}^3$ e altura 8 cm. Determine:
   (a) O raio da base
   (b) A área lateral do cilindro
8. Dois cones têm a mesma base circular de raio 3 cm. O primeiro tem altura 4 cm e o segundo tem altura 6 cm. Qual é a razão entre os seus volumes?
9. Uma esfera está inscrita num cubo de aresta 10 cm. Calcule:
   (a) O raio da esfera
   (b) O volume da esfera
   (c) A diferença entre o volume do cubo e o volume da esfera

Referências Bibliográficas

1. IEZZI, G., & MURAKAMI, C. (2013). Funamentos de Matemática Elementar (Vols. 1-11). Saraiva.
2. Mualinha, H. J. A. *Admissão ao Ensino Superior: Gatilho de matemática*
3. Vuma, J. P (2010). *Pré-universitário: Matemática 12*. Longman Moçambique
4. Vuma, J. P. & Cherinda, M (2009). *Pré-universitário: Matemática 11*. Longman Moçambique


TrocaPay
O seu saldo
PayPal no M-pesa
Transfere o seu saldo
ESTAGNADO no PayPal
para o M-pesa ou E-mola
por uma Taxa adicional
de +12%
SOLICITE -NOS
Cell: +258 87 936 9395
Morada: Polana Caniço A,
Av. Vladimir Lenine, Maputo,
Moçambique
Fácil, Rápido
e Seguro


TrocaPay
Aceitamos toda
Moeda
estrangeira
Pagamentos mobile
Digital câmbio
Transferência carteiras
móveis
Cartões de crédito
SOLICITE NOS JÁ
Telefone
879369395
Morada
Polana Caniço A, Av. Vladimir
Lenine, Maputo, Moçambique