CORREÇÃO DETALHADA
Exame de Admissão de Matemática
ISCISA / 2018
República de Moçambique

Guião de Correção

FILOSCHOOL

Bem-vindo(a) à nossa aplicação de preparação para exames! Chegou a hora de se destacar nos seus testes e conquistar o sucesso académico que você merece. Apresentamos o "Guião de Exames Resolvidos": a sua ferramenta definitiva para uma preparação eficaz e resultados brilhantes!

Aqui, encontrará uma vasta coleção de exames anteriores cuidadosamente selecionados e resolvidos por especialistas em cada área. Nossa aplicação é perfeita para estudantes de todos os níveis académicos, desde o ensino médio até a graduação universitária.

Questões 1-35

Questão 1

Resolução:

Precisamos encontrar a interseção entre os números reais positivos e os números reais negativos.

Por definição:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$
$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$$

Como não existe nenhum número que seja simultaneamente positivo e negativo, a interseção destes conjuntos é vazia:

$$\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$$

Nota: O zero não pertence nem a $\mathbb{R}^+$ nem a $\mathbb{R}^-$.

Resposta: B) $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$

Questão 2

Resolução:

Seja A o conjunto dos que gostam de Administração Hospitalar e T o conjunto dos que gostam de Tecnologia Biomédica.

Dados:

$$|A| = 60\%$$
$$|T| = 46\%$$
$$\text{Nem A nem T} = 32\%$$

Pelo princípio da inclusão-exclusão:

$$|A \cup T| = 100\% - 32\% = 68\%$$

Usando a fórmula:

$$|A \cup T| = |A| + |T| - |A \cap T|$$
$$68 = 60 + 46 - |A \cap T|$$
$$68 = 106 - |A \cap T|$$
$$|A \cap T| = 38\%$$

Resposta: C) 38%

Questão 3

Resolução:

Calculemos a expressão:

$$\begin{aligned}\sqrt{8}+\sqrt{2} &= \sqrt{4\cdot 2}+\sqrt{2}\\ &= \sqrt{4}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\\ &= 2\sqrt{2}+\sqrt{2}\\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

Resposta: D) $3\sqrt{2}$

Questão 4

Resolução:

Pela soma dos ângulos internos de um triângulo:

$$\begin{aligned}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} &= 180\\ 22+54+\hat{C} &= 180\\ \hat{C} &= 180-76 = 104\end{aligned}$$

As bissectrizes dividem os ângulos ao meio:

$$\begin{aligned}\text{Bissectriz de } \hat{B}: &\quad \frac{54}{2} = 27 \text{ de cada lado}\\ \text{Bissectriz de } \hat{C}: &\quad \frac{104}{2} = 52 \text{ de cada lado}\end{aligned}$$

O ponto D está no encontro das bissectrizes de B e C. Vamos analisar o triângulo BDC formado: No triângulo BDC, pela soma dos ângulos internos:

$$\begin{aligned}27+52+\hat{D}_{interno} &= 180\\ 79+\hat{D}_{interno} &= 180\\ \hat{D}_{interno} &= 101\end{aligned}$$

Como D está entre as bissectrizes na parte de baixo (conforme o enunciado), o ângulo pretendido $\hat{D}$ é o ângulo **suplementar** do ângulo interno calculado:

$$\begin{aligned}\hat{D} &= 180-\hat{D}_{interno}\\ &= 180-101\\ &= 79\end{aligned}$$

Resposta: Sem alternativa correcta

Questão 5

Resolução:

Calculemos a expressão passo a passo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \div \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Usando as propriedades das potências:

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \frac{16}{9} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{9} \\
&= \frac{16}{36} = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

Resposta: B) $\frac{4}{9}$

Questão 6

Resolução:

Resolvemos cada inequação separadamente:

Primeira inequação:

$$\begin{aligned}
\frac{4x-1}{2} - \frac{x+1}{3} &\leq 0 \\
\frac{3(4x-1) - 2(x+1)}{6} &\leq 0 \\
\frac{12x - 3 - 2x - 2}{6} &\leq 0 \\
\frac{10x-5}{6} &\leq 0 \\
10x - 5 &\leq 0 \\
x &\leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Segunda inequação:

$$\begin{aligned}
5 - \frac{3(x+1)}{2} &\geq -1 \\
10 - 3(x+1) &\geq -2 \\
10 - 3x - 3 &\geq -2 \\
7 - 3x &\geq -2 \\
-3x &\geq -9 \\
x &\leq 3
\end{aligned}$$

A interseção é: $x \in]-\infty, \frac{1}{2}]$

Resposta: B) $]-\infty, \frac{1}{2}]$

Questão 7

Resolução:

Para a equação $3x^2 - (m+1)x + m - 2 = 0$ ter duas raízes reais iguais, o delta deve ser zero:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac = 0 \\
[-(m+1)]^2 - 4(3)(m-2) &= 0 \\
(m+1)^2 - 12(m-2) &= 0 \\
m^2 + 2m + 1 - 12m + 24 &= 0 \\
m^2 - 10m + 25 &= 0 \\
(m-5)^2 &= 0 \\
m &= 5
\end{aligned}
$$

Resposta: B) $m = 5$

Questão 8

Resolução:

Pelo gráfico, a função tem zeros em $x = 1$ e $x = 3$, vértice em $(2, -1)$ e ordenada na origem $y = 3$.

A forma fatorada é:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a(x-1)(x-3) \\
&= a(x^2 - 4x + 3)
\end{aligned}
$$

Como $f(0) = 3$:

$$
\begin{aligned}
3 &= a(0 - 0 + 3) \\
3 &= 3a \\
a &= 1
\end{aligned}
$$

Portanto: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Resposta: A) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Questão 9

Resolução:

Triângulo isósceles com lados 5 cm, 5 cm e base 6 cm.

Primeiro, calculamos a altura usando o Teorema de Pitágoras. A altura divide a base ao meio (3 cm de cada lado):

$$
\begin{aligned}
h^2 + 3^2 &= 5^2 \\
h^2 + 9 &= 25 \\
h^2 &= 16 \\
h &= 4 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

Área do triângulo:

$$
A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{6 \times 4}{2} = 12 \text{ cm}^2
$$

Resposta: B) $A = 12$

Questão 10

Resolução:

A negação de uma conjunção é a disjunção das negações. Pela Lei de De Morgan:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

Resposta: D) $\sim p \vee \sim q$

Questão 11

Resolução:

O número de maneiras diferentes de classificar 6 concorrentes sem empates é o número de permutações de 6 elementos:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Resposta: A) 720

Questão 12

Resolução:

Múltiplos de 6 entre 1 e 40: 6, 12, 18, 24, 30, 36
Total de múltiplos de 6: 6 páginas
Probabilidade:

$$P = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} = 0,15 = 15\%$$

Resposta: B) 15%

Questão 13

Resolução:

Resposta: C) $x \in]-\infty, 2[$

Questão 14

Resolução:

Resolvemos a equação biquadrada. Seja $y = x^2$:

$$\begin{aligned} y^2 - 8y + 16 &= 0 \\ (y-4)^2 &= 0 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Voltando para x:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Resposta: D) $\{-2, 2\}$

Questão 15

Resolução:

Para o logaritmo existir, o argumento deve ser positivo:

$$\begin{aligned} 6 - 3x &> 0 \\ -3x &> -6 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Domínio: $x \in]-\infty, 2[$

Resposta: C) $]-\infty, 2[$

Questão 16

Resolução:

Como os logaritmos têm a mesma base e são iguais, os argumentos devem ser iguais:

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 1 + 2x \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Verificamos o domínio:

- Para $x = -1$: $3(-1) + 2 = -1 < 0$ (não está no domínio)
- Para $x = -1$: $1 + 2(-1) = -1 < 0$ (não está no domínio)

Portanto, não há solução.

Resposta: D) $\{\}$

Questão 17

Resolução:

Uma expressão algébrica racional é um quociente de polinómios onde o denominador contém a variável.

- A) $\frac{3x-1}{5}$ - denominador constante
- B) $\frac{3x-1}{5x}$ - denominador com variável (racional)
- C) $\sqrt{x+7}$ - irracional
- D) $x + 4$ - inteira

Resposta: B) $\frac{3x-1}{5x}$

Questão 18

Resolução:

Analisemos cada parte da expressão:

- $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$: o denominador $\sqrt{x^2+1}$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ (sempre positivo)
- $\sqrt[3]{1+x}$: a raiz cúbica existe para todo $x \in \mathbb{R}$

Como ambas as partes existem para todo número real, o domínio é $\mathbb{R}$.

Resposta: D) $\mathbb{R}$

Questão 19

Resolução:

O quadrado ABCD está inscrito numa circunferência. Sabendo que o lado do quadrado mede $5\sqrt{3}$, precisamos encontrar a medida do raio da circunferência.

Quando um quadrado está inscrito numa circunferência, os seus quatro vértices tocam a circunferência e a diagonal do quadrado coincide com o diâmetro da circunferência.

Vamos considerar o triângulo retângulo formado por dois lados adjacentes do quadrado e a sua diagonal. Sejam os vértices A, B e C do quadrado, onde AB e BC são lados adjacentes e AC é a diagonal.

Aplicando o Teorema de Pitágoras neste triângulo retângulo:

$$(\text{diagonal})^2 = (\text{lado})^2 + (\text{lado})^2$$

Seja d a diagonal e $l = 5\sqrt{3}$ o lado do quadrado:

$$\begin{aligned} d^2 &= l^2 + l^2 \\ d^2 &= 2l^2 \\ d^2 &= 2 \times (5\sqrt{3})^2 \\ d^2 &= 2 \times 25 \times 3 \\ d^2 &= 150 \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{150} \\ d &= \sqrt{25 \times 6} \\ d &= 5\sqrt{6} \end{aligned}$$

Como a diagonal do quadrado inscrito é igual ao diâmetro da circunferência, e o raio é metade do diâmetro:

$$\begin{aligned} r &= \frac{d}{2} \\ r &= \frac{5\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

Calculando numericamente:

$$\begin{aligned} r &= \frac{5 \times 2,449...}{2} \\ r &\approx 6,12 \end{aligned}$$

Resposta: Sem alternativa correcta

Questão 20

Resolução:

Simplificamos a expressão:

$$\begin{aligned}\frac{5!+6!}{6!} &= \frac{5!+6\cdot 5!}{6!} \\ &= \frac{5!(1+6)}{6\cdot 5!} \\ &= \frac{7}{6}\end{aligned}$$

Resposta: B) $\frac{7}{6}$

Questão 21

Resolução:

Resolvemos a equação:

$$\begin{aligned}2\cos(x)-\sqrt{3} &= 0 \\ \cos(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

No intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, temos:

$$x = \frac{\pi}{6}$$

Resposta: C) $\frac{\pi}{6}$

Questão 22

Resolução:

Os dados ordenados são: 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 13, 14, 14, 15, 16, 16

Total de 19 valores. A mediana é o valor central (10º valor):

Contando: o 10º valor é 11. (O enunciado menciona 20 estudantes, porem temos apenas 19 notas dos estudantes)

Resposta: C) 11,0

Questão 23

Resolução:

A variância é o quadrado do desvio padrão:

$$\sigma^2 = (3,1)^2 = 9,61$$

Resposta: D) 9,61

Questão 24

Resolução:

Pelo Teorema do Resto, o resto da divisão de $p(x)$ por $(x+1)$ é $p(-1)$:

$$\begin{aligned}p(-1) &= 2(-1)^4 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 1 \\ &= 2(1) - 3(1) + 3 + 1 \\ &= 2 - 3 + 3 + 1 = 3\end{aligned}$$

Resposta: B) 3

Questão 25

Resolução:

Temos $(2-x)\cdot q(x) = x^2 - x - 2$.

Fatorando o lado direito:

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

Como $(2-x) = -(x-2)$:

$$\begin{aligned} -(x-2)\cdot q(x) &= (x-2)(x+1) \\ q(x) &= -(x+1) = -x-1 \end{aligned}$$

Resposta: D) $-x-1$

Questão 26

Resolução:

Analisando os termos:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 = \frac{\sqrt{1}}{1^2} \\ u_2 &= \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2^2} \\ u_3 &= \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3^2} \\ u_4 &= \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{4}}{16} = \frac{2}{16} = \frac{\sqrt{4}}{4^2} \end{aligned}$$

O termo geral é: $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2}$

Resposta: B) $\frac{\sqrt{n}}{n^2}$

Questão 27

Resolução:

Para uma P.A. com $u_1 = 1$, $n = 8$ termos e $S_8 = 148$:

Usando a fórmula da soma:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(u_1+u_n)}{2} \\ 148 &= \frac{8(1+u_8)}{2} \\ 148 &= 4(1+u_8) \\ 37 &= 1 + u_8 \\ u_8 &= 36 \end{aligned}$$

Como $u_8 = u_1 + 7r$:

$$\begin{aligned} 36 &= 1 + 7r \\ 35 &= 7r \\ r &= 5 \end{aligned}$$

Resposta: D) 5

Questão 28

Resolução:

Para uma P.G. com razão $q = 0,3$ e $u_2 = 0,9$:
O termo geral é $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$
Como $u_2 = u_1 \cdot q$:

$$\begin{aligned} 0,9 &= u_1 \cdot 0,3 \\ u_1 &= \frac{0,9}{0,3} = 3 \end{aligned}$$

Portanto: $u_n = 3 \cdot (0,3)^{n-1}$
Resposta: C) $u_n = 3 \cdot (0,3)^{n-1}$

Questão 29

Resolução:

Calculamos o determinante usando a regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & k & 2 & 0 & k \end{array}$$

Diagonais principais (positivas):

$$\begin{aligned} &0 \cdot 2 \cdot 2 = 0 \\ &1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \\ &(-3) \cdot (-1) \cdot k = 3k \end{aligned}$$

Diagonais secundárias (negativas):

$$\begin{aligned} &(-3) \cdot 2 \cdot 0 = 0 \\ &0 \cdot 1 \cdot k = 0 \\ &2 \cdot (-1) \cdot 1 = -2 \end{aligned}$$

Determinante:

$$\begin{aligned} \det &= (0 + 0 + 3k) - (0 + 0 - 2) \\ &= 3k + 2 \end{aligned}$$

Como $\det = 5$:

$$\begin{aligned} 3k + 2 &= 5 \\ 3k &= 3 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

Resposta: B) 1

Questão 30

Resolução:

Resposta: A) -2

Questão 31

Resolução:

O limite apresenta uma indeterminação $\frac{0}{0}$ quando $x \to 2$.

Fatorando o numerador usando a diferença de cubos:

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)\\ &= 4+4+4=12\end{aligned}$$

Resposta: C) 12

Questão 32

Resolução:

Para a função ser contínua em $x = -2$, os limites laterais devem ser iguais ao valor da função:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^-} f(x) &= -2+m\\ \lim_{x\to -2^+} f(x) &= (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3\\ f(-2) &= 3\end{aligned}$$

Para continuidade:

$$\begin{aligned}-2+m &= 3\\ m &= 5\end{aligned}$$

Resposta: D) 5

Questão 33

Resolução:

Para $f(x) = e^{2x+1}$:

Primeira derivada:

$$f'(x) = 2e^{2x+1}$$

Segunda derivada:

$$f''(x) = 4e^{2x+1}$$

Calculando em $x = 0$:

$$f''(0) = 4e^{2(0)+1} = 4e^1 = 4e$$

Resposta: C) 4e

Questão 34

Resolução:

Para $f(x) = x^3 - 12x$:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

A função é decrescente onde $f'(x) < 0$:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12 &< 0 \\ x^2 - 4 &< 0 \\ (x-2)(x+2) &< 0 \end{aligned}$$

Isto ocorre quando $x \in]-2, 2[$

Resposta: B) $]-2, 2[$

Questão 35

Resolução:

Dos retângulos com 60m de perímetro, quais devem ser as dimensões de comprimento e de largura, respetivamente, para o retângulo com maior área?

Sejam x o comprimento e y a largura do retângulo. O perímetro é dado por:

$$2x + 2y = 60$$

Simplificando esta equação:

$$\begin{aligned} x + y &= 30 \\ y &= 30 - x \end{aligned}$$

A área do retângulo é dada por:

$$A = x \cdot y$$

Substituindo a expressão de y em função de x:

$$\begin{aligned} A(x) &= x(30 - x) \\ A(x) &= 30x - x^2 \end{aligned}$$

Para encontrar o valor de x que maximiza a área, precisamos derivar a função área em relação a x e igualar a zero:

$$A'(x) = 30 - 2x$$

Igualando a derivada a zero para encontrar os pontos críticos:

$$\begin{aligned} 30 - 2x &= 0 \\ 30 &= 2x \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Para verificar que este ponto é realmente um máximo, calculamos a segunda derivada:

$$A''(x) = -2$$

Como $A''(x) = -2 < 0$, a concavidade é voltada para baixo, confirmando que $x = 15$ corresponde a um ponto de máximo.

Substituindo $x = 15$ na equação do perímetro para encontrar y:

$$y = 30 - x$$
$$y = 30 - 15$$
$$y = 15$$

Portanto, as dimensões que maximizam a área são: comprimento = 15m e largura = 15m.

Resposta: C) 15 e 15